华章数学译丛

35

HZ BOOKS

PRENTICE HALL

Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms

A Primer

小波与小波变换导论

C. Sidney Burrus
(美) Ramesh A. Gopinath 等著
Haitao Guo

程正兴 译



华章数学译丛

35

Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms

A Primer

小波与小波变换导论

C. Sidney Burrus
（美）Ramesh A. Gopinath 等著
Haitao Guo

程正兴 译



本书是一本介绍小波与小波变换的基础教材，书中以傅里叶方法为基础，讨论了尺度函数和小波构造的多种方法，综合了数学和信号处理文献中与小波变换相关的内容．另外，本书还包含对基本多分辨小波系统的新的推广，例如 *M* 带小波系统、双正交小波系统、小波包、提升算法、多小波、平移不变冗余小波变换等．在应用方面，本书简述了基于小波的信号处理、离散小波变换的非线性滤波或去噪、小波信号和图像压缩等．

本书可作为高年级本科生和研究生的教材，适用于信号处理、无线电通信、计算机科学和应用数学等专业，也适于从事相关领域的研究人员和从业人员阅读．

本书版权登记号：图字：01-2006-3146

图书在版编目(CIP)数据

小波与小波变换导论/(美)伯罗斯(Burrus, C. S.)等著；程正兴译．-北京：机械工业出版社，2007.10

(华章数学译丛)

书名原文：Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer

ISBN 978-7-111-21544-8

Ⅰ.小…　Ⅱ.①伯…　②程…　Ⅲ.小波分析-教材　Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 075003 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)

责任编辑：王春华

北京京北制版厂印刷·新华书店北京发行所发行

2008 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm·15.75 印张

定价：32.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译者序

小波分析是20世纪80年代中期基于Y. Meyer、S. Mallat及I. Daubechies等人的奠基性工作而迅速发展起来的一门新兴学科，它是调和分析发展的划时代产物．小波分析在理论上的发展和完善与实际应用紧密地联系在一起．虽然小波分析已经经过了20多年的发展，但它的理论研究，尤其是与应用紧密结合的相关理论与算法的研究远没有完善，有许多基本的问题还没有解决．在小波的应用上，虽然并不缺少好的典范，但应用的普及以及对问题的深入解决，是随着小波分析理论与算法的进一步发展而发展起来的，而许多实际问题的解决过程，本身就推动了小波分析理论的发展．

与傅里叶变换的频域分析方法不同，小波分析是一种时-频分析方法，它的时频窗在高频时自动变窄变高，在低频时又自动变宽变低，具有自动"聚焦"功能，所以又把小波称为"数学显微镜"．进而，小波分析的多分辨分析方法是一种分离信号分量的好方法，它比大多数其他分析、处理和压缩信号的方法更为优越．

本书采用与傅里叶变换和傅里叶级数对比的方法引入连续小波变换和小波级数；阐述了尺度函数和小波构造的多种方法；讨论了小波变换计算与数字信号处理的滤波器组理论之间的联系和等价性；对于小波的推广的多种形式，例如，M带小波系统、小波包、双正交小波系统、提升算法、多小波、平移不变冗余小波变换、离散多分辨分析和离散时间小波变换等，进行了比较简单但有效的叙述．在应用方面，本书简述了基于小波的信号处理；使用离散小波变换逼近快速傅里叶变换；离散小波变换的非线性滤波或去噪；小波统计估计；小波信号和图像压缩；小波在偏微分方程数值解、地震和地球物理信号处理、医学和生物信号、图像处理、通信、分形等方面的应用．本书注重叙述的连贯性，不拘泥于理论的证明，而且对于需要进一步了解相关内容的读者，提供了相应的参考文献．

本书采用工程师、科学工作者和应用数学研究人员都容易接受的一种方式来阐述小波分析，作者既把小波分析作为一种理论途径，又把它作为一种有效的解决问题的实用方法．本书适用于有一定技术背景、想了解和学习小波分析的理工科研究生和科学技术人员，尤其适合具备一些数字信号处理知识的读者阅读．对于应用数学、计算数学领域从事小波分析的研究者和使用者来说，了解和使用本书中叙述的方法对于小波分析的具体应用也是很有帮助的．

由于译者水平所限，书中不妥与误译之处在所难免，希望广大读者和同行批评指正．

程正兴
于西安交通大学理学院
2007年7月

前　言

本书讨论小波隐含的思想与小波的性质，并说明如何将小波作为信号处理、数值分析和数学模型的分析工具. 书中采用工程师、科学工作者和应用数学研究人员都容易接受的一种阐述方式，既把小波分析作为一种理论途径，又把它作为一种有效的解决问题的实用方法. 虽然这门学科的起源可以上溯到较早的年代，但重新引起人们的兴趣并且有所进展仅有不多年的光景.

小波方面早期的研究工作是由 Morlet、Grossmann、Meyer、Mallat 等人在 20 世纪 80 年代完成的，但是 1988 年 Ingrid Daubechies[Dau88a]的论文才在信号处理、统计学和数值分析等多个应用数学领域引起更多人的注意. 许多早期工作是在法国[CGT89, Mey92a]和美国[Dau88a, RBC*92, Dau92, RV91]开展的. 与许多新兴学科一样，开创工作同特定的应用或传统的理论框架有着紧密的联系. 本书中，我们将考察从应用中抽象和从研究中发展出来的理论，并且讨论这种理论同其他相关思想的关系. 我们自己在信号处理方面的兴趣和背景无疑会影响本书的阐述方式.

小波研究的最新目标是创建一族基函数(或通常的展开函数)和变换，用以对某个函数或信号给出丰富的、有效的和有用的描述. 如果将信号表示成时间的函数，小波则在时间和频率(或尺度)两方面提供有效的局部化. 另外一个中心思想是多分辨，其中信号的分解借助于细节的分辨.

对于傅里叶级数，选择正弦函数作为基函数，然后考察得到的展开式的性质. 对于小波分析，我们先提出欲求的性质，然后推导出基函数. 小波的基函数所具备的一个重要性质就是能提供多分辨分析. 出于多种原因，通常要求基函数是正交的. 在这些目标之下，你将会见到若干相关的技术，包括傅里叶变换、短时傅里叶变换、离散傅里叶变换、维格纳分布、滤波器组、子带编码，以及由此产生的其他信号展开式和信号处理方法.

对于数学研究人员、科学工作者和工程师而言，基于小波的分析是一种令人兴奋的问题求解的新工具. 它天生就能与数字计算机配合，因为其基函数是由求和而不是求积分或求导数定义的. 与大多数传统的展开系统不同，小波分析的基函数不是微分方程的解. 在一些领域，它是多年来第一个真正意义上的新工具. 事实上，使用小波和小波变换时，需要采用一种新观点和新方法来解释我们仍然在学习如何利用的表达形式.

新近 Donoho、Johnstone、Coifman 等人的工作，为小波分析为何有如此广泛的应用和如此强大的功能增添了理论依据，而且对仍在进行的工作进行了推广. 他们证明了小波系统具有一些固有的普遍优势，而且对于一类广泛的问题而言是接近最优的[Don93b]. 他们还证明了自适应工具可以用于创建特殊信号和信号类的特定小波系统.

多分辨分解看起来是一种分离信号分量的方法，它比大多数其他分析、处理和压缩信号的方法更为优越. 由于离散小波变换可以在不同的无关尺度下分解信号，而且非常灵活，所以 Burke 把小波称为"数学显微镜"[Bur94, Hub96]. 正是因为这种强有力的和灵活的分解，在小波变换领域内，对信号的线性和非线性处理为信号的检测、滤波和压缩提供了各种新方法[Don93b, Don95, Don93a, Sai94b, WTWB97, Guo97]. 同时，这还可以用来作为鲁棒数值算法的基础.

读者也会看到这与数字信号处理的滤波器组理论之间有一种有趣的联系和等价性[Vai92, AH92]. 其实，用滤波器组得到的一些结果与用离散时间小波得到的结果是相同的，并且这在信号处理领域已由 Vetterli、Vaidyanathan、Smith 和 Barnwell 等人研究得到. 滤波器组以及计算小波变换的大多数算法，是更为一般的多级系统和时变系统的组成部分.

对于那些具有一定技术背景但对小波知之甚少或者全然不知的人而言，本书可作为一本自学辅导教材或入门书. 假定读者具备傅里叶级数和傅里叶变换、线性代数和矩阵论的知识，还假定读者达到工学、理学或应用数学学士的同等水平. 掌握一些信号处理知识对阅读本书是有帮助的，但并非是必需的. 我们借助于一维信号处理[RV91]——作为时间的实函数或复函数模型，来讨论这些思想，但这样的思想以及方法在二维、三维甚至四维的图像表示和图像处理中也证明是有效的[SA92, Mal89a]. 向量空间已证明是研究小波理论与应用的天然工具. 具有这个领域的一些背景知识是有益的，不过也可以在需要的时候补习. 使用一些小波软件系统运行实例和进行实验对于小波的学习是大有裨益的. 书后附有 MATLAB 程序，这些程序在我们的网站(前言后面提及)上也能找到. 其他几种软件系统在第 10 章介绍.

介绍小波理论有几种不同的方式. 我们选用由连续时间信号或函数表示为级数展开式出发，这同傅里叶分析中所用的傅里叶级数类似. 由这种级数表示，我们可以转移到离散变量(例如，一个信号的抽样)的函数的展开和滤波器组理论，以便有效地计算与解释展开系数. 这种情况类似于离散傅里叶变换(DFT)及其有效实现的快速傅里叶变换(FFT). 我们还可以由级数展开得到称为连续小波变换的一种积分变换，这类似于傅里叶变换或傅里叶积分. 我们认为，从级数展开出发可以充分领悟小波理论，而且很容易看清小波分析与傅里叶分析之间的异同.

本书分为若干相对自成一体的章节. 前面几章对离散小波变换(DWT)进行了非常全面的讨论，这种变换把信号展开为小波和尺度函数的级数. 后面几章简述离散小波变换的推广和应用. 各章均引用了许多其他著作，可以作为一种有注解的参考文献. 因为本书旨在作为小波分析的导论，而在这个领域已经积累了大量的文献，所以我们在书后附上一个很长的文献目录. 然而，这个目录很快就会变成不完全的，因为有大量不断发表的论文. 无论如何，对于作为导论这一目标而言，提供一个文献指南是非常重要的.

近来美国科学院出版了一本书，书中由 Barbara Burke 撰写的一章[Bur94]对小波分析

原理及其发展的历史作了很好的概述. Burke 还写了此章的精彩扩充版本[Hub96], 这是任何对小波理论感兴趣的人应该阅读的. Daubechies 在[Dau96]中对早期研究工作的历史给出了简要的介绍.

本书提出的很多结果和关系，是以定理和证明形式或以推导的形式阐述的. 我们把重点放在定理陈述的正确性方面，而对定理的证明往往只给出推导的轮廓，其目的在于了解实质而非形式证明. 事实上，为了不致使阐述凌乱，我们把很多推导放在附录中. 希望这种方式有助于读者深入理解这个非常有趣但有时又有些模糊的新的数字信号处理工具.

我们在书中采用的记号兼有信号处理文献和数学文献所用的记号，希望这样做能使思想与结果更易于理解，但这会丧失一些一致性和清晰性.

作者感谢 AFOSR、ARPA、NSF、Nortel 公司、德州仪器公司和 Aware 公司所提供的支持. 我们特别感谢 H. L. Resnikoff，最初是他把我们领入小波领域，而他又准确地预见到我们的能力. 我们还感谢 W. M. Lawton、小 R. O. Wells、R. G. Baraniuk、J. E. Odegard、I. W. Selesnick、M. Lang、J. Tian 和莱斯大学计算数学实验室的各位成员，本书中介绍的很多思想与结果是他们提出的. 第一署名作者感谢家人 Maxfield 和 Oshman 的无私支持. 莱斯大学 EE - 531 和 EE - 696 班的学生们提供了极有价值的反馈，他们是：Bruce Francis、Strela Vasily、Hans Schüssler、Petter Steffen、Gary Sitton、Jim Lewis、Yves Angel、Curt Michel、J. H. Husoy、Kjersti Engan、Ken Castleman、Jeff Trinkle、Katherine Jones，与此有关的还有莱斯大学和其他地方的同事.

我们还要特别感谢 Tom Robbins 及其 Prentice Hall 的同事们的支持与帮助，他们的评审意见使本书的内容大为充实.

我们乐于知道任何读者发现的本书中的任何错误或使人误解的论述，真诚欢迎对本书提出任何改进意见. 各种建议和评论可用电子邮件发至 csb@ rice. edu. 涉及本书的软件、文章、勘误以及有关莱斯大学小波研究工作的其他信息，可以从网站 http://www-dsp. rice. edu/和链接到正在展开小波研究的其他网站上找到.

C. Sidney Burrus，得克萨斯，Houston

Ramesh A. Gopinath，纽约，Yorktown Heights

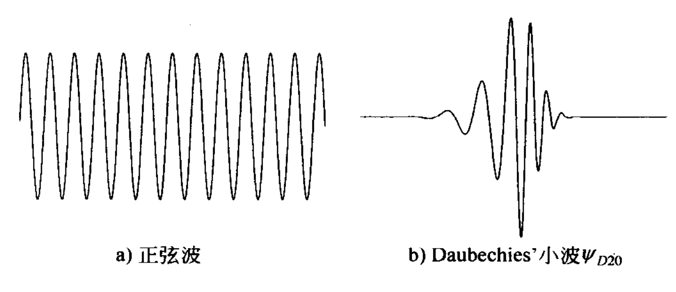
Haitao Guo，加利福尼亚，Sunnyvale

目　录

第1章 小波导引

本章将概述本书中涉及的主题，目的是为了向了解和有能力使用小波与小波变换的读者，简要介绍其概念、目标以及性质的概要．细节会在本书后面给出．

波(wave)通常定义为时间或空间的一个振荡函数，例如一条正弦曲线．傅里叶(Fourier)分析是波的分析．它借助于正弦曲线(或等价地，复指数)展开信号或函数，已经证明了在数学、科学和工程中，特别对于周期的、时不变的或平稳现象，傅里叶分析是非常有用的．小波(wavelet)是“小的波”，小波具有在时间上集中能量的能力，是分析瞬变的、非平稳的或时变现象的一个工具．小波仍然具有振荡波的特征，而且还具有同时提供时间和频率分析的能力，并具有灵活的数学基础．图 1-1 描述的波(正弦曲线)在 $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ 上等振幅振荡，所以具有无限能量，而小波具有围绕一点集结的有限能量．



a) 正弦波　　b) Daubechies'小波 ψ_{D20}

图 1-1　波和小波

我们将取小波，并且在信号或函数的级数展开中使用它，这与使用波或正弦曲线表示信号或函数的傅里叶级数的方法相同．信号是一个连续变量的函数，这个变量通常表示时间或距离．由这个级数展开，我们将提出类似于离散傅里叶变换的一个离散时间改型，在离散傅里叶变换中，信号直接用一串数表示，而这一串数可以是信号的抽样、另一串数的抽样或信号与某个展开集的内积．最后，我们将简要地描述连续小波变换，其中信号和变换都是连续变量的函数．这类似于傅里叶变换．

1.1 小波和小波展开系统

在详细地探究小波及其性质之前，先给出它的一般特征，以及要用它做什么[Swe96b].

1.1.1 什么是小波展开或小波变换

通常可以比较好地分析、描述或者处理一个信号或函数 $f(t)$，如果它能表示为一个线

性分解

$$f(t) = \sum_{\ell} a_{\ell}\psi_{\ell}(t), \tag{1.1}$$

其中 ℓ 是有限和或无限和的整数指标，a_ℓ 是实值展开系数，而 $\psi_\ell(t)$ 是 t 的实值函数的集合，并称 $\psi_\ell(t)$ 为展开集(合). 如果展开(1.1)是唯一的，这个集就称为所能展开的函数类的一组基(basis). 如果基是正交的，即

$$\langle\psi_k(t), \psi_\ell(t)\rangle = \int \psi_k(t)\psi_\ell(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad k \neq \ell, \tag{1.2}$$

那么，系数可以用内积(inner product)计算：

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t)\rangle = \int f(t)\psi_k(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

我们可以看到，把(1.1)代入(1.3)并使用(1.2)，就给出了单个系数 a_k. 如果基的集合是非正交的，那么存在一个对偶基集合 $\tilde{\psi}_k(t)$，使得应用具有对偶基的(1.3)，给出所需的系数．这将在第2章中叙述．

对于傅里叶级数，正交基函数 $\psi_k(t)$ 是带有频率 $k\omega_0$ 的 $\sin(k\omega_0 t)$ 和 $\cos(k\omega_0 t)$. 对于泰勒级数，非正交基函数是简单的单项式 t^k，并且对于许多其他展开，它们是各种各样的多项式．有些展开使用样条函数和分形．

对于小波展开(wavelet expansion)，构造了一个两参数系统使得(1.1)变成

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t), \tag{1.4}$$

其中 j 与 k 是整数指标，并且 $\psi_{j,k}(t)$ 是通常形成正交基的小波展开函数．

展开系数的集 $a_{j,k}$ 称为 $f(t)$ 的离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)，并且(1.4)是逆变换．

1.1.2 什么是小波系统

小波展开集不是唯一的．存在许多不同的可以有效使用的小波系统(wavelet system)，但是，所有的系统似乎都必须具有下述三条一般的特征[Swe96b].

[2]

1. 小波系统是构造或表示一个信号或函数的建筑块(building block)的集合．它是一维(或较高维)信号的某个类的一个二维展开集合(一般是基). 换句话说，如果小波集由 $\psi_{j,k}(t)$ (j, $k = 1, 2, \cdots, n$) 给出，则对于系数 $a_{j,k}$ 的某个集合，线性展开就是 $f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t)$.

2. 小波展开是信号的时间-频率(时-频)局部化(localization). 这是指信号的大部分能量将由少数展开系数 $a_{j,k}$ 提供．

3. 由信号可以高效率地计算系数．结果是许多小波变换(展开系数的集)能够用 $O(N)$ 次算术运算计算．这是指浮点乘法和加法的次数随着信号长度的增加而线性增加．更一般的小波变换需要 $O(N\log(N))$ 次运算，与快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)相同[BP85].

实际上，所有小波系统都具有这些很一般的特征．这里，傅里叶级数将一维连续变量的函数映射到一维系数序列，小波展开将一维函数映射到二维系数数组．我们将看到，这种二维表示允许在时间和频率两方面局部化信号．一个傅里叶级数展开在频率上局部化，如果一个信号的傅里叶级数展开只有一个大系数，那么这个信号本质上是由系数标号确定的频率的一条正弦曲线．信号的最简单时域表示本身给出了时间局部化．如果信号是一个单脉冲，则脉冲的局部化是时间局部化．一个小波表示将同时给出在时间和频率两方面的局部化．事实上，一个小波表示像一个音乐乐谱，其中音符的位置确定了音调和它们的频率是多少．

1.1.3 小波系统更具体的特征

对小波展开，有三个添加的更特殊的特征[Swe96b，Dau92]．

1. 所有的第一代小波(first-generation wavelet)系统是由一个单尺度函数或小波通过简单的尺度化(scaling)和平移(translation)生成的．二维参数化是由函数(有时称为生产小波或母小波)$\psi(t)$通过

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \quad j,k \in \mathbf{Z} \tag{1.5}$$

实现的，其中 $\mathbf{Z}$ 是所有整数的集合，并且因子 $2^{j/2}$ 保持一个不依赖于尺度 j 的常数范数．这个时间或空间的参数化用 k，而频率或尺度(精确地说是尺度的对数)的参数化用 j，结果是特别有效．

2. 几乎所有有用的小波系统都满足*多分辨*(multiresolution)条件．这是指，如果一个信号的集合能用 $\varphi(t-k)$ 的加权和表示，那么一个(包含原来集合的)更大集合可以用 $\varphi(2t-k)$ 的加权和表示．换句话说，如果基本的展开信号是宽度的一半，且平移步长为宽度的一半，那么它们将精确地表示一个较大的信号类，或者给出任一信号比较好的逼近． 3

3. 低分辨率系数可以由高分辨率系数用一个称为*滤波器组*(filter bank)的树结构算法计算．这允许展开系数(也称为离散小波变换)的一个很有效的计算，并且把小波变换与数字信号处理的比较古老的领域联系起来．

平移和伸缩运算似乎对于许多实际的信号和信号生成过程是基本的，并且它们的使用是小波为高效率展开函数的原因之一．图 1-2 是(1.5)中描述的一个母小波的平移和伸缩的图示．当指标 k 改变时，小波的位置沿横轴移动，这将明确地表示展开在时间或者空间上事件的位置．当指标 j 改变时，小波的形状在尺度上改变了，这将给出表示细节或分辨率．注意到，当尺度变得比较细(j 比较大)时，时间的步长变得比较小，比较窄的小波和比较小的步长都可以表示较详细的细节或较高的分辨率(清晰度)．为清晰起见，在平移中只表示了每四分之一项($k=1, 5, 9, 13, \cdots$)，按其他方式表示图将是混乱的．这里没有描述但却重要的是基本母小波的形状还可以改变．这是在小波系统设计时做的，并且可以用一个集合很好地表示一类信号．

对于傅里叶级数与傅里叶变换，以及大多数信号展开系统，挑选展开(基)函数，然

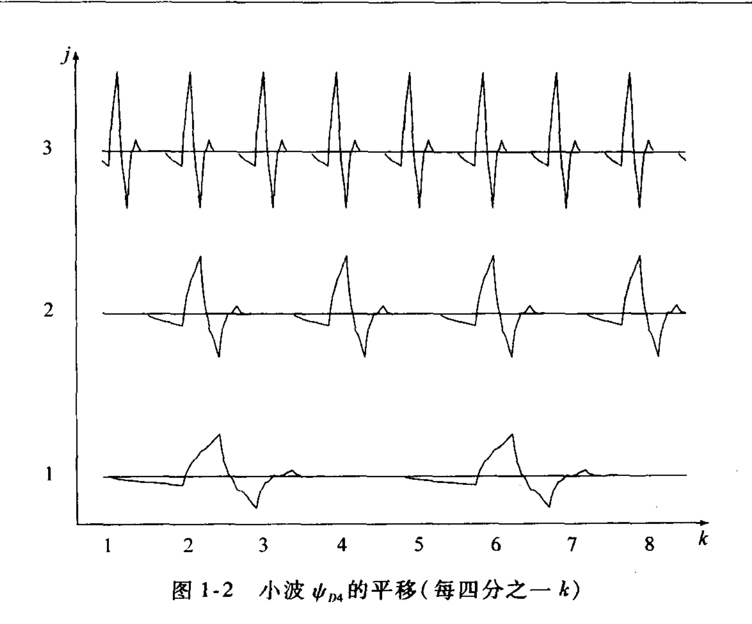


图 1-2 小波 ψ_{D4} 的平移(每四分之一 k)

4

后导出和分析得到的变换的性质. 对于小波系统, 这些性质或特征在数学上是需要的, 然后推导出基函数. 因为这些约束没有使用所有的自由度, 对于一种特定应用, 可以要求小波系统有另外的性质. 一旦决定用傅里叶级数, 正弦曲线基函数就是完全集合. 对于小波, 这不成立, 有许多不同的小波都满足上述性质. 事实上, 了解和设计小波是本书的一个重要课题.

小波分析很适合瞬变信号. 傅里叶分析适合周期信号或者统计特征依时间不变的信号. 小波的局部化性质允许一个瞬变事件的小波展开使用少数系数. 这个结果在应用中很有用.

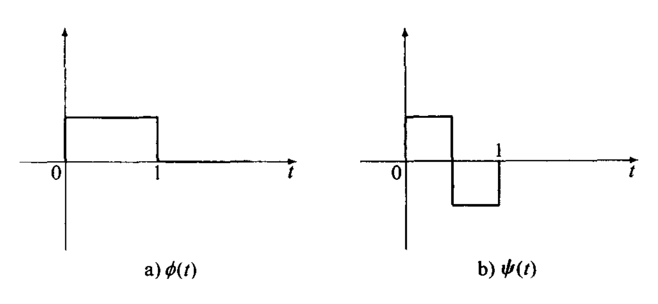
1.1.4 哈尔尺度函数和小波

多分辨阐述需要两个紧密联系的基函数. 除了已经讨论(但还没有精确定义)的小波 $\psi(t)$ 外, 还需要另一个称为*尺度函数*(scaling function)的基函数 $\varphi(t)$. 需要这个函数的理由和关系的详细叙述将在下章中展开, 而这里我们将仅在小波展开中使用它.

最简单的正交小波系统是由哈尔(Haar)尺度函数和小波生成的, 如图 1-3 所示. 使用这些尺度函数和小波的组合, 可以将一大类信号表示为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(t-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k} \psi(2^j t - k). \tag{1.6}$$

哈尔[Haa10]在 1910 年证明了这一结果, 而小波是他的工作的推广. 哈尔系统和展开的一个例子在第 2 章末尾给出.



a) $\phi(t)$　　b) $\psi(t)$

图 1-3　哈尔尺度函数和小波

1.1.5　小波看起来像什么

所有傅里叶基函数看起来很像．高频正弦波看起来像低频正弦波的压缩．余弦波是正弦波平移 90°或 $\pi/2$ 弧度．要取大数目的傅里叶分量来表示一个不连续性或一个急剧的拐角．作为对比，有许多不同的小波，并且一些小波本身就具有急剧的拐角．

5

为了领会小波的特殊性质，读者要认识到直到 20 世纪 80 年代末期才有最有用的一些基本小波．图 1-4 描述了四个不同的尺度函数，每个在 $0<t<6$ 区间之外是零，并且每个生成所有平方可积函数的一个正交小波基．

更多的尺度函数及其相应的小波在后面章节中描述，哈尔小波参见图 1-3，而其细节在第 2 章末尾展示．

1.1.6　小波分析为什么是有效的

小波展开和小波变换已经证明在分析信号与现象的一个很宽的类上是很有效的，并且是高效的．这是为什么呢？什么样的性质给出了这种有效性？

1. 对于一大类信号，在(1.4)或(1.6)中的小波展开系数 $a_{j,k}$ 或 $d_{j,k}$ 的大小，随着 j 与 k 的增大，迅速地减小．这个性质称为*无约束基*(unconditional basis)，并且这也是在信号和图像压缩、去噪以及检测中小波有效的原因．Donoho[Don93b，DJKP95b]指出，对于一类范围宽广的信号的压缩、去噪和检测，小波是接近最优的．

2. 利用小波展开，可以对信号特征进行更精确的局部描述和分离．一个傅里叶系数代表一个分量，它持续所有时间，所以，瞬态事件一定用一个相位特征化，这允许在大的时间周期上相消或增强．一个小波展开系数代表一个分量，它本身是局部的并且是比较容易描述的．小波展开可以允许在时间与频率上交迭的信号分量的分离．

3. 小波是可调的和可修改的．因为不是只有一个小波，所以可以将它们设计成适合各种应用．它们对于可调的系统是理想的，这个系统本身可调整以适合信号．

4. 小波的产生和离散小波变换的计算很适合利用数字计算机来进行．稍后我们将看到，小波的定义方程没有使用微积分，没有求导或积分，只有乘法和加法——这是数字计算机的基本运算．

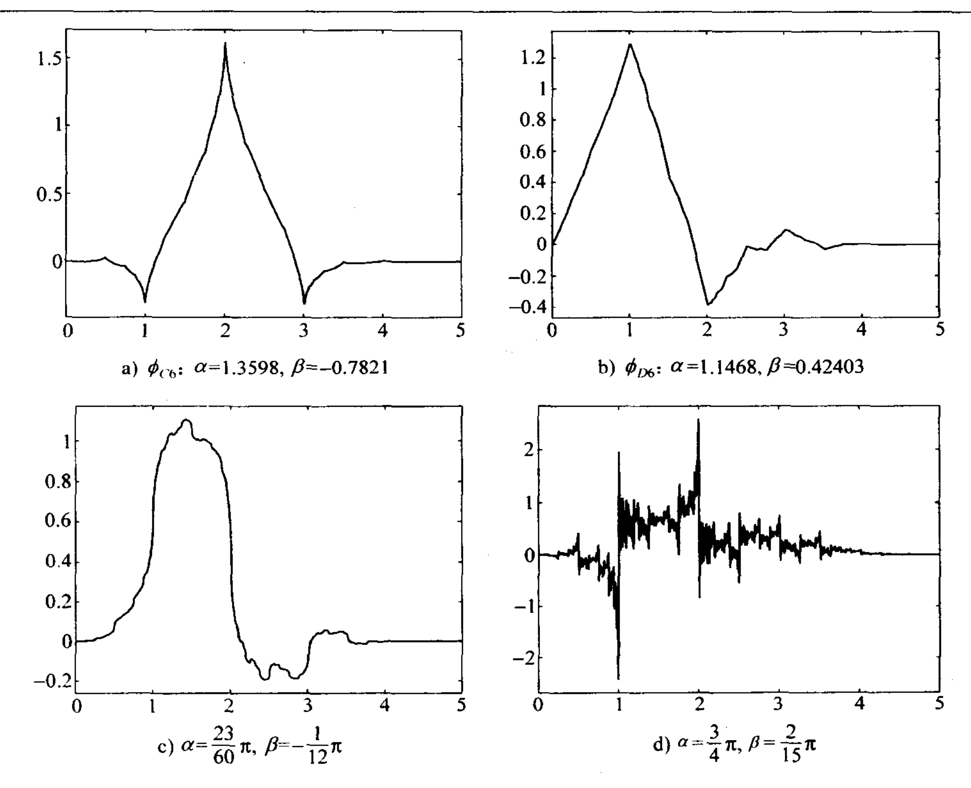


图 1-4　尺度函数的例子(α 和 β 的意义，见 5.8 节)

这里虽然没有清晰地描述细节，但是指出了理论和应用两方面重要的结果，并且解释了本书与其他书中涉及的主题.

1.2　离散小波变换

这个两变量的基函数的集合，在使用方法上类似于时-频分析的短时傅里叶变换、盖博(Gabor)变换或者维格纳(Wigner)分布[Coh89，Coh95，HB92]. 我们的目标是生成一个展开函数的集合，使(平方可积函数空间)$L^2(\mathbf{R})$的任一信号可以表示为级数

$$f(t) = \sum_{j,k} a_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \tag{1.7}$$

或者，使用(1.5)，表示为

$$f(t) = \sum_{j,k} a_{j,k} \psi_{j,k}(t), \tag{1.8}$$

其中二维系数 $a_{j,k}$的集合称为$f(t)$的离散小波变换(DWT). 如果 $\psi_{j,k}(t)$对于感兴趣的信号空间形成一组规范正交基[1] [Dau92]，那么一个计算 $a_{j,k}$的更具体的形式可以使用内积写为

[1] 基和框架在第 4 章定义.

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle \psi_{j,k}(t), f(t) \rangle \psi_{j,k}(t), \tag{1.9}$$

内积通常定义为

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x^*(t) y(t) \mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

6 ~ 7

大多数函数或信号展开的目的是展开系数 $a_{j,k}$ 给出关于信号的更有用的信息，而这些信息不能直接由信号本身明显给出．第二个目的是大多数系数为零或很小．这称为稀疏(sparse)表示，并且在统计估计和检测、数据压缩、非线性噪声减少以及快速算法等应用中，这种表示是相当重要的．

虽然这种展开称为离散小波变换，但或许称为小波级数更合适，因为它是一个级数展开，将一个连续变量的函数映射到一个系数序列，其方法与傅里叶级数的相同．然而，这不是约定．

这个小波级数展开借助于两个指标，时间平移 k 和尺度指标 j. 对于傅里叶级数，只有两个可能的 k 值——0 或 $\pi/2$，分别给出正弦项和余弦项，值 j 给出频率调节．换句话说，傅里叶级数也是一个二维展开，但是这不是指数形式，并且一般也不留意三角函数形式．

用图形表示一个信号的离散小波变换有点困难，因为它是一个两变量或两指标的函数．然而，我们在图 1-5 中给出了一个简单脉冲的离散小波变换，以展示变换的局部性．其他的表示在下章中给出．

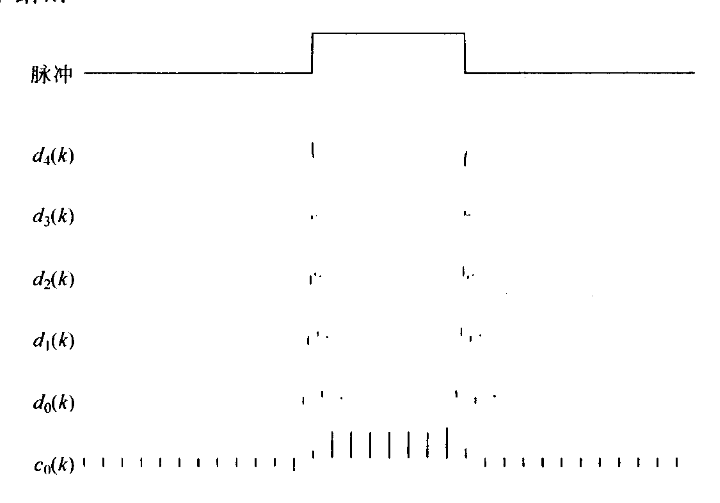


图 1-5　一个脉冲的离散小波变换，使用 ψ_{D6}，对于每个较高的尺度增大 $\sqrt{2}$ 倍

1.3　离散时间小波变换和连续小波变换

如果信号本身是一个数的序列，或许是某个连续变量函数的抽样，或许是一个内积的集合，这个信号的展开称为离散时间小波变换(DTWT). 将一个数的序列映射到一个数的

8

序列的方法几乎与离散傅里叶变换(DFT)的相同．然而，不要求信号像离散傅里叶变换中要求的是有限的或周期的．为了与傅里叶术语一致，或许应称为离散时间小波级数，但这不是约定．如果离散时间信号的长度是有限的，则变换可以表示为一个有限矩阵．这个离散时间信号的级数展开的公式化是用滤波器组方法实现的[Vai92，VK95]，这将在本书的第8章中叙述．

如果信号是一个连续变量的函数，并且变换是两个连续变量的函数，则连续小波变换(CWT)可以定义为

$$F(a,b) = \int f(t)w\left(\frac{t-a}{b}\right)\mathrm{d}t, \tag{1.11}$$

而逆变换为

$$f(t) = \iint F(a,b)w\left(\frac{t-a}{b}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}b, \tag{1.12}$$

其中$w(t)$是基小波，且a，$b\in\mathbf{R}$是实连续变量．对于小波$w(t)$，Daubechies[Dau92]、Heil与Walnut[HW89]等人讨论了支持这个可逆变换的容许性条件，在本书的7.8节中给出了简要叙述．它类似于傅里叶变换或傅里叶积分．

1.4 练习和实验

本书讨论了关于小波和小波变换的概念，使用本书附录或MATLAB工具箱[MMOP96]中的MATLAB程序进行实验是很有用的．附录C的程序中使用的记号与书中公式使用的记号相同，这样在学习程序时有助于理解理论，并且反之亦然．

1.5 本章小结

本章是对小波和小波变换的理论与使用两方面的一个导引．我们给出了小波的大量基本特征，并且为了使读者对本书的主题与结构有所了解，浅尝辄止地给出了怎样做以及为什么那样做．

下一章将给出多分辨的概念，用它来讨论尺度函数以及小波．接下来，讨论如何使用来自数字信号处理的滤波器组计算小波展开系数．在介绍完小波系统设计之后，给出尺度函数、小波以及小波变换的理论与性质的更详细的讨论．第8章借助于滤波器组详细讨论小波理论．

9

本书的前面部分详细研究基本的小波系统，稍后部分将简要研究若干重要的推广．

第2章　小波系统的多分辨阐述

小波在数学和实用解释两方面，由使用分辨率的概念[Mey93，Mal89b，Mal89c，Dau92]到定义改变尺度的有效性，都似乎是最适用的．为了做到这些，我们将从尺度函数 $\varphi(t)$ 出发，而不是直接从小波 $\psi(t)$ 出发，在尺度函数由分辨率的概念定义后，小波函数由尺度函数导出．本章给出这些概念一种比较直观的叙述，而更严格的论证在后面第5章中给出．

这个多分辨阐述明显是为描述信号设计的，其中一个单信号分解为比较精细的和更精细的细节，而这在表示信号中是有价值的，其中，即使没有所需的分辨率的概念，也需要给出一个时间-频率或时间-尺度描述．然而，在某些情形，多分辨是不合适的，例如，对于短时傅里叶变换或盖博变换，或对于局部正弦或余弦基，或重叠正交变换，所有这些将在本书的后面简要讨论．

2.1　信号空间

为了讨论能用尺度函数和/或小波的和表示的函数或信号的集合，我们需要泛函分析中的一些概念和术语．如果读者不熟悉这些内容，或在本节中的相关知识不充足，则可以跳过这几章而读第5章或[VD95]．

一个函数空间(function space)是(有限维或无限维的)线性向量空间，其中向量是函数，数量是实数(有时是复数)，并且数量的乘法和向量的加法类似于(1.1)．内积是由两个向量 $f(t)$ 与 $g(t)$ 通过积分得到的数量 a，表示为

$$a = \langle f(t), g(t) \rangle = \int f^*(t) g(t) \, \mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

而积分域依赖于所考虑的信号类．这个内积定义向量的范数或“长度”，定义为

$$\| f \| = \sqrt{| \langle f, f \rangle |}, \tag{2.2}$$

10

它是三维欧几里得空间中几何运算和定义的一个简单推广．具有非零范数的两个向量(信号)称为是正交(orthogonal)的，如果它们的内积是零．例如，在傅里叶级数中，$\sin(t)$ 与 $\sin(2t)$ 是正交的．

在信号处理中一个特别重要的空间称为 $L^2(\mathbf{R})$．这是一个函数空间，这个空间的所有函数 $f(t)$ 是模平方可积的．“L”的含义是勒贝格积分，“2”表示函数的模平方的积分，而“$\mathbf{R}$”表明积分自变量 t 是实直线上的数．函数 $g(t)$ 是这个空间的一个元素，可表示为：$g \in L^2(\mathbf{R})$，或简单地 $g \in L^2$．

虽然大多数定义和推导都是借助于信号属于 L^2，但对于比较大的信号类，许多结果仍然成立．例如，多项式不属于 L^2，但在任一有限域上，可以用大多数小波系统展开．

为了研究在(1.5)中描述的小波展开，我们需要展开集合或基底集合的概念．如果我们从信号的向量空间$\mathcal{S}$出发，那么，如果任一$f\in\mathcal{S}$可以表示为$f(t)=\sum_k a_k\varphi_k(t)$，则称函数$\varphi_k(t)$的集合是空间$\mathcal{S}$的一个展开集合．如果表示是唯一的，那么这个集合就是一组基底．另一方面，我们可以从展开集或基底出发，定义空间$\mathcal{S}$是能表示为$f(t)=\sum_k a_k\varphi_k(t)$的所有函数的集合，这个空间称为基底集合张成(span)的空间．在许多情况下，实际上需要信号空间是基底集合张成的空间的闭包．这是指，空间不只包含能用基函数的线性组合表示的所有信号，而且还包含这些无穷展开的极限．一个空间的闭包通常用在其上加一条横线来表示．

2.2 尺度函数

为了使用多分辨的概念，我们将从定义尺度函数出发，然后借助于尺度函数定义小波．如前章对小波所描述的，我们借助于如下基本尺度函数的整数平移定义一个尺度函数的集合：

$$\varphi_k(t)=\varphi(t-k)\quad k\in\mathbf{Z}\quad \varphi\in L^2. \tag{2.3}$$

对于所有从负无穷到无穷的整数k，由这些函数张成的$L^2(\mathbf{R})$的子空间定义为

$$\mathcal{V}_0=\overline{\operatorname*{Span}_k\{\varphi_k(t)\}}, \tag{2.4}$$

上边一横表示闭包．这意味着

$$f(t)=\sum_k a_k\varphi_k(t)\quad 对任一\quad f(t)\in\mathcal{V}_0. \tag{2.5}$$

一般地，可以通过改变尺度函数的时间尺度增大张成的子空间的规模．一个二维函数族通过基本尺度函数的尺度化和平移由

11

$$\varphi_{j,k}(t)=2^{j/2}\varphi(2^jt-k), \tag{2.6}$$

生成，对于所有整数$k\in\mathbf{Z}$，它在k上的张成是

$$\mathcal{V}_j=\overline{\operatorname*{Span}_k\{\varphi_k(2^jt)\}}=\overline{\operatorname*{Span}_k\{\varphi_{j,k}(t)\}}. \tag{2.7}$$

这是指，如果$f(t)\in\mathcal{V}_j$，那么它可以展开为

$$f(t)=\sum_k a_k\varphi(2^jt+k). \tag{2.8}$$

对于$j>0$，张成可以比较大，因为$\varphi_{j,k}(t)$是收缩的并且用比较小的步子平移，所以，它可以提供更详细的细节．对于$j<0$，$\varphi_{j,k}(t)$是伸开的并且用比较大的步子平移，所以，这些伸开的尺度函数只能表示粗糙的信息，并且它们张成的空间比较小．考虑尺度改变的影响的另外的途径是借助于分辨率(清晰度)，如果我们谈论摄影或者光学分辨率，那么这个尺度的概念就与分辨率一样．

多分辨分析

为了与直观的尺度或分辨率的概念一致，我们用要求张成空间的如下嵌套来陈述多分

辨分析(multiresolution analysis, MRA)的基本要求[Mal98c]:

$$\cdots \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset L^2, \tag{2.9}$$

或

$$\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1} \quad \text{对所有} \quad j \in \mathbf{Z} \tag{2.10}$$

而

$$\mathcal{V}_{-\infty} = \{0\}, \quad \mathcal{V}_{\infty} = L^2, \tag{2.11}$$

包含高分辨率信号的空间，也包含较低分辨率的空间.

由$\mathcal{V}_j$的定义，空间一定满足固有的尺度条件

$$f(t) \in \mathcal{V}_j \iff f(2t) \in \mathcal{V}_{j+1}, \tag{2.12}$$

这保证了空间的元素只是下一个空间元素的尺度变化．张成的空间之间的关系如图 2-1 所示.

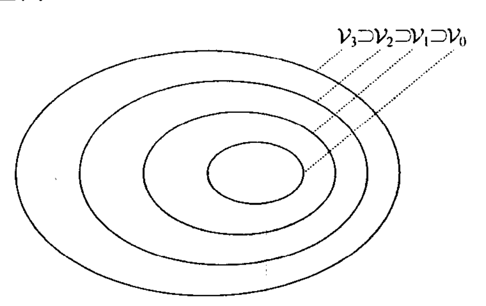


图 2-1 由尺度函数张成的嵌套向量空间

$\varphi(2^j t - k)$张成的嵌套空间用$\mathcal{V}_j$表示，并且表示在(2.9)与(2.12)中，以及在图 2-1 中图示说明，达到要求$\varphi(t) \in \mathcal{V}_1$，这是指，如果$\varphi(t)$属于$\mathcal{V}_0$，它也属于由$\varphi(2t)$张成的空间$\mathcal{V}_1$. 这意味着，$\varphi(t)$可以借助于平移$\varphi(2t)$的加权和表示为

$$\boxed{\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t - n), \quad n \in \mathbf{Z},} \tag{2.13}$$

12

其中系数$h(n)$称为尺度函数(或尺度滤波器，或尺度向量)系数的实数或复数序列，并且$\sqrt{2}$保持具有 2 尺度的尺度函数的范数.

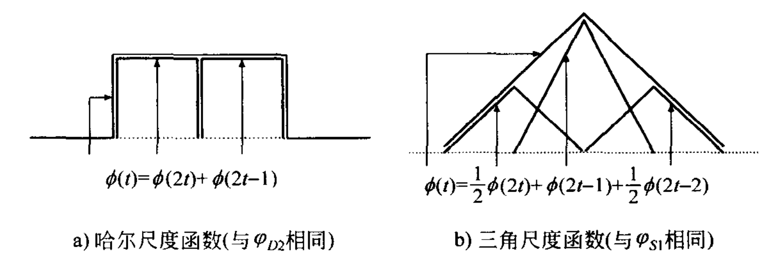
这个递推方程是尺度函数的理论基础，并且，以某种方式，类似于具有系数$h(n)$和解$\varphi(t)$的差分方程，这个解可能存在，也可能不存在，或者是唯一的．这个方程用不同的名字来描述不同的解释，它也称为加细方程、多分辨分析方程或伸缩方程.

哈尔尺度函数是简单的宽为 1，高为 1 的脉冲函数$\varphi(t)$，如图 2-2 所示，并且显然可以使用$\varphi(2t)$通过

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1), \tag{2.14}$$

构造$\varphi(t)$，这是指对于系数$h(0) = 1/\sqrt{2}$，$h(1) = 1/\sqrt{2}$，满足式(2.13).

图 2-2 中的三角尺度函数(也是一个一次样条函数)对于$h(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，$h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$h(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$，满足(2.13)，并且在图 6-1 的第一部分给出的 Daubechies 尺度函数，如同所有的尺度函数对于它们相应尺度系数所做的，对于$h = \{0.483, 0.8365, 0.2241, -0.1294\}$，满足(2.13). 事实上，小波系统的设计就是系数$h(n)$的选择，这些将在后面进一步讨论.



a) 哈尔尺度函数(与 φ_{D2}相同)　　b) 三角尺度函数(与 φ_{S1}相同)

图 2-2　哈尔尺度函数和三角尺度函数

2.3　小波函数

信号的一个重要特征是可以较好地描述或参数化，这不是通过使用 $\varphi_{j,k}(t)$ 以及尺度函数张成的子空间的大小随 j 的增加而增加来实现，而是通过定义函数 $\psi_{j,k}(t)$ 的稍有不同的集合，张成尺度函数在不同尺度下张成的空间之间的差空间来实现，这些函数就是在本书导引中讨论的小波．

要求尺度函数和小波是正交的有许多优点．正交基函数允许独立地计算展开的系数，并且具有在小波变换域中允许信号能量划分的帕塞瓦尔(Parseval)定理．在$\mathcal{V}_{j+1}$中$\mathcal{V}_j$的正交补空间定义为$\mathcal{W}_j$，这是指$\mathcal{V}_j$中的所有元素正交于$\mathcal{W}_j$中的所有元素，我们要求

$$\langle\varphi_{j,k}(t),\psi_{j,\ell}(t)\rangle=\int\varphi_{j,k}(t)\psi_{j,\ell}(t)\mathrm{d}t=0, \tag{2.15}$$

对所有适当的 j，k，$\ell\in\mathbf{Z}$ 成立．

不同的子空间之间的关系可以由下述表示看到．由(2.9)，我们可以从任一$\mathcal{V}_j$出发，例如从 $j=0$ 出发，并且写作

$$\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}_1\subset\mathcal{V}_2\subset\cdots\subset L^2. \tag{2.16}$$

现在，我们定义小波张成的子空间$\mathcal{W}_0$，使得

$$\mathcal{V}_1=\mathcal{V}_0\oplus\mathcal{W}_0, \tag{2.17}$$

这扩展为

$$\mathcal{V}_2=\mathcal{V}_0\oplus\mathcal{W}_0\oplus\mathcal{W}_1. \tag{2.18}$$

一般地，当$\mathcal{V}_0$为尺度函数 $\varphi(t-k)$ 张成的初始空间时，这给出

$$L^2=\mathcal{V}_0\oplus\mathcal{W}_0\oplus\mathcal{W}_1\oplus\cdots. \tag{2.19}$$

图 2-3 形象地描绘出，对于不同的 j，尺度函数空间的嵌套性和小波空间为什么是相邻的差空间(除零元素外)或正交补空间．

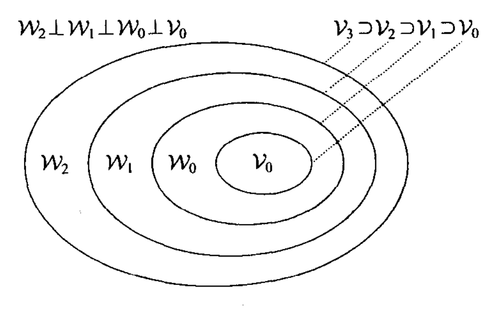


图 2-3　尺度函数向量空间和小波向量空间

初始空间的尺度是任意的，并且可以选择

较高的分辨率，例如 $j=10$，给出

$$L^2 = \mathcal{V}_{10} \oplus \mathcal{W}_{10} \oplus \mathcal{W}_{11} \oplus \cdots, \tag{2.20}$$

13 ~ 14

或者选择较低的分辨率，例如 $j=-5$，给出

$$L^2 = \mathcal{V}_{-5} \oplus \mathcal{W}_{-5} \oplus \mathcal{W}_{-4} \oplus \cdots, \tag{2.21}$$

或者，甚至 $j=-\infty$，其中(2.19)变成

$$L^2 = \cdots \oplus \mathcal{W}_{-2} \oplus \mathcal{W}_{-1} \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots, \tag{2.22}$$

这完全消去了尺度空间并且允许形如(1.9)的展开．

描述$\mathcal{V}_0$与小波空间关系的另一方法是记

$$\mathcal{W}_{-\infty} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_{-1} = \mathcal{V}_0, \tag{2.23}$$

这再次表明尺度空间的尺度可以任意选择．实际上，一般选择表示感兴趣的信号中最粗糙的细节．

因为这些小波存在于由下一个较窄的尺度函数张成的空间，即$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_1$，它们可以由(2.13)中所定义的平移尺度函数 $\varphi(2t)$ 的加权和表示为

$$\boxed{\psi(t) = \sum_n h_1(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \quad n \in \mathbf{Z},} \tag{2.24}$$

对某个系数集 $h_1(n)$ 成立．由小波张成“差空间”或正交补空间，以及小波(或尺度函数)的整数平移的正交性的要求，在附录 A(A.48)中证明了，尺度函数系数正交性需要的小波系数用

$$h_1(n) = (-1)^n h(1-n), \tag{2.25}$$

给出．对于有限偶长度 N 的一个例子是，$h_1(n)$ 可以是

$$h_1(n) = (-1)^n h(N-1-n). \tag{2.26}$$

对于形如

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \tag{2.27}$$

15

的展开函数类，用(2.24)生成的函数，给出原型小波或母小波 $\psi(t)$，其中 2^j 是 t 的尺度化(j 是尺度的$\log_2$)，$2^{-j}k$ 是 t 的平移，并且 $2^{j/2}$ 在不同尺度下保持小波的(多数情况为 1 的)L^2 范数．

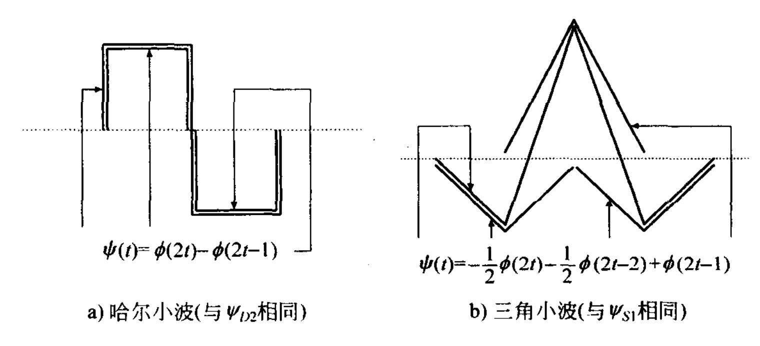
图 2-4 表示了图 2-2 中尺度函数相应的哈尔小波和三角小波．对于哈尔小波，(2.24)中的系数是 $h_1(0)=1/\sqrt{2}$，$h_1(1)=-1/\sqrt{2}$，它们满足(2.25)．图 6-1 表示的尺度函数相应的 Daubechies 小波在图 6-2 中表示，而相应的系数在本书后面表 6-1 和 6-2 中给出．

现在我们构造能张成整个 $L^2(\mathbf{R})$ 的函数 $\varphi_k(t)$ 和 $\psi_{j,k}(t)$ 的集合．按照(2.19)，任一函数 $g(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 可以写为

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j,k)\psi_{j,k}(t), \tag{2.28}$$

这是借助于尺度函数和小波的一个级数展开．

在这个展开中，(2.28)的第一个和给出 $g(t)$ 的一个低分辨或粗糙的逼近．在第二个和中每增加指标 j，就加进了一个较高的或者较细的分辨函数，这加进了更多的细节．这



a) 哈尔小波(与 ψ_{D2}相同)　　b) 三角小波(与 ψ_{S1}相同)

图 2-4　哈尔小波和三角小波

有点类似于傅里叶级数，其中较高的频率项包含信号的细节.

稍后在本书中，将讨论形成一组正交基或一个紧框架的展开函数的性质，这使得可以用如下内积计算系数：

$$c(k) = c_0(k) = \langle g(t), \varphi_k(t) \rangle = \int g(t)\varphi_k(t)\,dt, \tag{2.29}$$

和

$$d_j(k) = d(j,k) = \langle g(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int g(t)\psi_{j,k}(t)\,dt. \tag{2.30}$$

系数 $d(j, k)$有时写为 $d_j(k)$，以强调时间平移指标 k 与尺度参数 j 之间的不同. 系数 $c(k)$有时写为 $c_j(k)$或 $c(j, k)$，如果在(2.28)中求和下限使用的是更一般的"初始尺度"而不是 $j=0$.

16

在这点上重要的是读者要认识到展开式(2.28)的尺度函数部分与展开的小波部分的关系. 由(2.19)中嵌套空间的表示，我们看到，尺度函数可以在任一尺度 j 上定义. 公式(2.28)使用 $j=0$ 表示尺度函数族.

读者可以在本章最后检验哈尔系统的例子，现在仅仅给出这些性质的描述.

2.4　离散小波变换

因为

$$L^2 = \mathcal{V}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0+1} \oplus \cdots, \tag{2.31}$$

使用(2.6)和(2.27)，可给出展开式(2.28)的更一般的表示：

$$g(t) = \sum_k c_{j_0}(k) 2^{j_0/2} \varphi(2^{j_0}t - k) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \tag{2.32}$$

或

$$g(t) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_j(k) \psi_{j,k}(t), \tag{2.33}$$

其中 j_0 可以如同在(2.19)和(2.28)中是 0、如同在(2.20)中是 10 或者如同在(1.8)和(2.22)中是负无穷，这时不使用尺度函数．选择 j_0 为 $\varphi_{j_0,k}(t)$ 张成的空间最粗糙的尺度．$L^2(R)$空间的剩余空间由小波张成，这个空间给出信号的高分辨率细节．实际上，这里给出的只是一个信号的抽样，而不是信号本身，当最细的尺度是抽样水平时，有一个最高的分辨率．

这种小波展开中的系数称为信号 $g(t)$ 的离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)．如果满足后面描述的一些条件，那么这些小波系数完全描述原始信号，并且能以与傅里叶级数类似的方法用于分析、描述、逼近和滤波．如果小波系统是正交的，那么这些系数可以用内积

$$c_j(k) = \langle g(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = \int g(t)\varphi_{j,k}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.34}$$

和

$$d_j(k) = \langle g(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int g(t)\psi_{j,k}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.35}$$

计算．如果尺度函数特性是好的，那么在高尺度，尺度函数类似于狄拉克(Dirac)δ 函数，并且内积简单抽样这个函数．换句话说，在足够高的分辨率上，信号的抽样与尺度系数很接近，这将在后面进一步说明．这表明对于一大类信号，小波系统形成一组无约束基[Don93b]，这将在第 5 章中讨论，而这表明，甚至对于最坏的信号类，当 j 与 k 快速增大时，小波展开系数急速下降．这就是为什么离散小波变换对于信号和图像压缩是有效的．

离散小波变换类似于傅里叶变换，但是在一些方法上，更灵活且信息更多．它可以像傅里叶级数一样成为周期的，以有效地表示周期信号．然而，与傅里叶级数不同，它能直接用于非周期瞬变信号而有极好的结果．一个脉冲的离散小波变换的例子在图 3-3 中描述，另外的例子在下节的之后描述． 17

2.5 帕塞瓦尔定理

如果尺度函数和小波形成一组规范正交基[⊖]，则帕塞瓦尔定理给出信号 $g(t)$ 的能量与每一个分量及它们的小波系数的能量的关系，这是规范正交性是重要的一个原因．

对于一般的小波展开(2.28)或(2.33)，帕塞瓦尔定理是

$$\int |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c(l)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_j(k)|^2, \tag{2.36}$$

而在展开区域的能量，时间由 k 而尺度由 j 划分．事实上，这是描述离散小波变换的时间-尺度参数平面的划分．如果展开系统是一个紧框架，那么在(2.36)中乘一个由冗余引起的常数．

⊖ 或者在第 4 章定义的一个紧框架．

Daubechies[Dau88a, Dau92]指出，这对于具有紧支撑的(即只是在有限区域上非零的)尺度函数和小波是可能的，并且是规范正交的．这使得时间局部化成为可能．现在，我们有了描述信号的结构，这个结构具有短时傅里叶分析和盖博基本分析的特性，但是使用一个新的变量——尺度．对于短时傅里叶变换，正交性和好的时-频分辨率根据 Balian-Low-Coifman-Semmes 定理[Dau90, Sie86]是不兼容的．更准确地，如果短时傅里叶变换是正交的，那么时间分辨率或频率分辨率是拙劣的且调整是刚性的，但小波变换没有这种情形．还注意到，各种尺度函数和小波能由在(2.13)中选择不同的系数 $h(n)$ 得到．

Donoho[Don93b]注意到，对于一类范围很宽广的信号，小波是一组无约束基．这是指，信号的小波展开具有迅速下降的系数，所以信号可以用小数目系数有效地表示．

我们首先叙述在定义式(2.13)中使用 2 进尺度的离散小波系统，这称为 2 带小波系统(two-band wavelet system)，是因为在第 3 章和第 8 章中讨论有关的 2 带滤波器组．还可以使用 $\varphi(t)=\sum_n h(n)\sqrt{M}\varphi(Mt-n)$ 定义一个更一般的离散小波系统，其中 M 是一个整数[SHG93]，这将在 7.2 节中讨论．离散小波变换的数值计算将在第 9 章中详细地讨论，其中对于周期信号使用了特别的公式．

2.6 离散小波变换和小波展开的显示

具有显示或形象化小波展开与小波变换的数据方式是重要的．这也是复杂的，因为离散小波变换是一个两个整数指标的实值函数，需要一种二维表示或绘制．这个问题有点类似于绘制傅里叶变换，傅里叶变换是一个复值函数．

18

有 5 种显示表明离散小波变换的不同特征：

1. 一个信号最基本的时域描述是信号本身(或者，对于大多数情况，是信号的抽样)，但是，这没有给出频率或尺度的信息．离散小波变换的一个很有用的性质是，对于式(2.33)中的一个高的开始尺度 j_0，信号的抽样是在这个尺度上的离散小波变换(这不同于傅里叶变换)．这是一种极端的情形，但是却表现出了离散小波变换的灵活性，而这将在后面展开讨论．

2. 最基本的小波域表示是在 j, k 平面上展开系数或离散小波变换的值 $c(k)$ 与 $d_j(k)$ 的一个三维图．这在一个二维纸上或在屏幕上表示是困难的，而图 2-5 和 2.8 中给出了一种形式的表示．

3. 尺度引起的一个很多信息的形象，可以用在 k 上求和(2.28)在每个尺度上产生的时间函数 $f_j(t)$ 表示，所以

$$f(t)=f_{j_0}+\sum_j f_j(t), \tag{2.37}$$

其中

$$f_{j_0}=\sum_k c(k)\varphi(t-k), \tag{2.38}$$

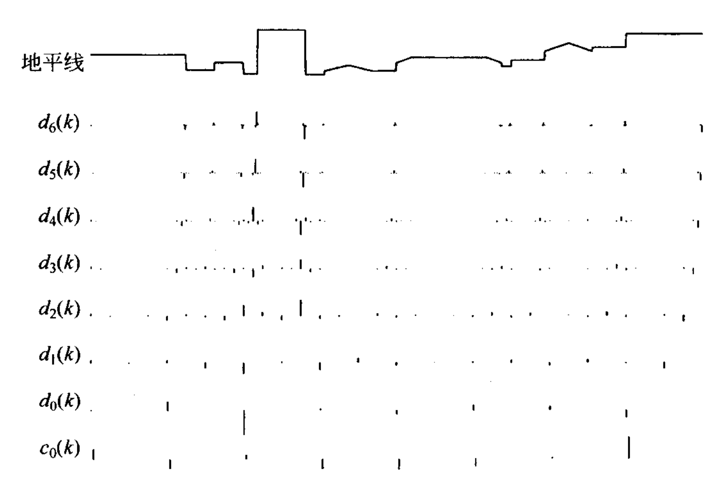


图 2-5 休斯敦地平线的离散小波变换，使用 $\psi_{D8'}$，对每个较高尺度放大$\sqrt{2}$倍

和

$$f_j(t) = \sum_k d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \tag{2.39}$$

这描述了信号在每个尺度上的分量，并且在图 2-7 和 2-10 中用图说明．

4. 另外的展示表明，小波展开的时间局部化由在 k 上求和(2.28)在每个平移上产生的时间函数 $f_k(t)$ 得到，所以

$$f(t) = \sum_k f_k(t), \tag{2.40}$$

其中

$$f_k(t) = c(k)\varphi(t-k) + \sum_j d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \tag{2.41}$$

这描述了信号在每个整数平移上的分量．

5. 当时间平移的指标和尺度的指标是连续变量时，基于时间–尺度平面的一个划分有另外的不同表示，这种表示称为“花砖时–频平面”．由于它是一种不同类型的表示，它将在第 9 章中叙述与图示．

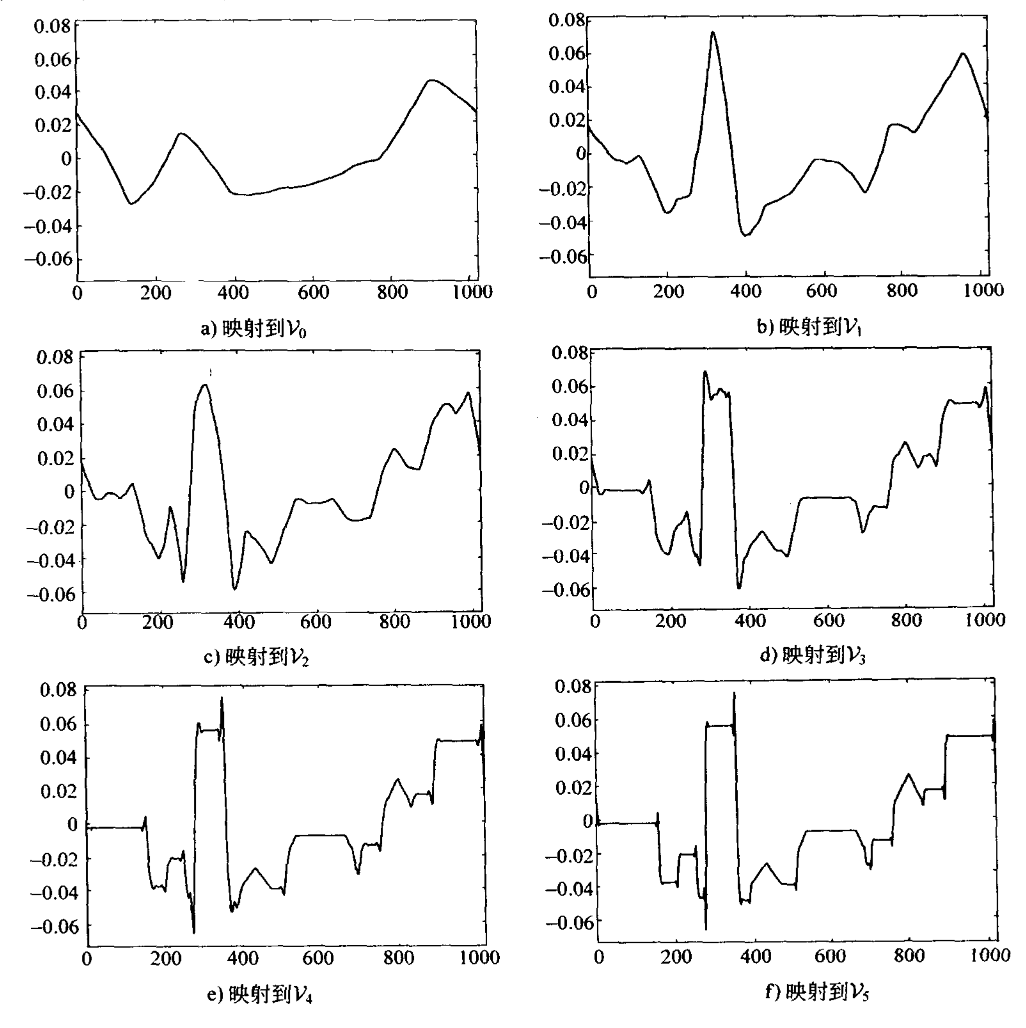
借助于小波变换的性质和能力、特殊小波系统的影响、小波展开表示一个信号的不同的属性和特征的方法可以形象化地展示这些显示实验． 19

2.7 小波展开的例子

本节将表明分解一个信号的小波展开方法，并且表明在不同尺度上的分量看起来像什么．这些展开使用称为长为 8 的 Daubechies 基小波(在第 6 章中叙述)，而在这里这不是主要的．小波分解的局部性质是本节的主题．

这些例子是比较标准的，一些取自 David Donoho 的论文和网站．第一个例子是分段线性函数的分解，表明了怎样处理边缘和常数．Daubechies 系统的特征是低阶多项式完全包含在尺度函数空间$\mathcal{V}_j$中，并且不需要小波，这是指，当一个信号的一段是一个多项式(例如一条直线)段时，则没有小波展开的系数 $d_j(k)$，但是当展开系数的计算重叠边缘时，则有一个小波分量．图 2-6 中用图形很好地表示了这一特征，其中高分辨率尺度给出边缘很准确的位置，并且在较低的尺度上，这向外伸展超越 k. 这说明了离散小波变换怎样才能用于边缘检测，以及怎样才能使大数目小的或零展开系数用于压缩．

图 2-6 表示出地平线信号在不同的尺度空间$\mathcal{V}_j$中的逼近．这个图示只是如何逼近的过程，在较高的尺度上，给出了越来越高的分辨率．较高的尺度给出更详细的细节的事实类



a) 映射到$\mathcal{V}_0$　b) 映射到$\mathcal{V}_1$　c) 映射到$\mathcal{V}_2$　d) 映射到$\mathcal{V}_3$　e) 映射到$\mathcal{V}_4$　f) 映射到$\mathcal{V}_5$

图 2-6　使用 $\phi_{D8'}$，休斯敦地平线信号到$\mathcal{V}$空间的映射

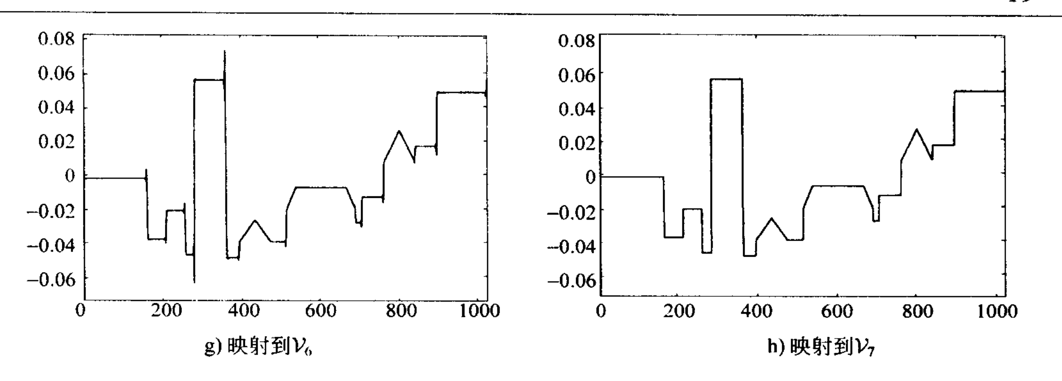


图 2-6 （续）

似于傅里叶方法，但是现在是局部的．图 2-7 通过表明信号分量图示了单独的小波分解，这些小波分量存在于不同的尺度 j 的小波空间$\mathcal{W}_j$中．这表明展开与图 2-6 的展开相同，但是小波分量是分别给出的，而不是对尺度函数累积地添加．注意到，大的对象如何在较低分辨率上展示出来，建筑群和各个建筑物是按照它们的宽度解决的．然而，边缘定位在较高分辨上，并且是很精确的定位．

20 ~ 21

第二个例子是使用一个鸟叫(chirp)信号或多普勒(doppler)信号，来说明尺度分解怎样描述一个时间变化的频率．图 2-8 直接给出了作为 j 与 k 的函数的离散小波变换系数．注

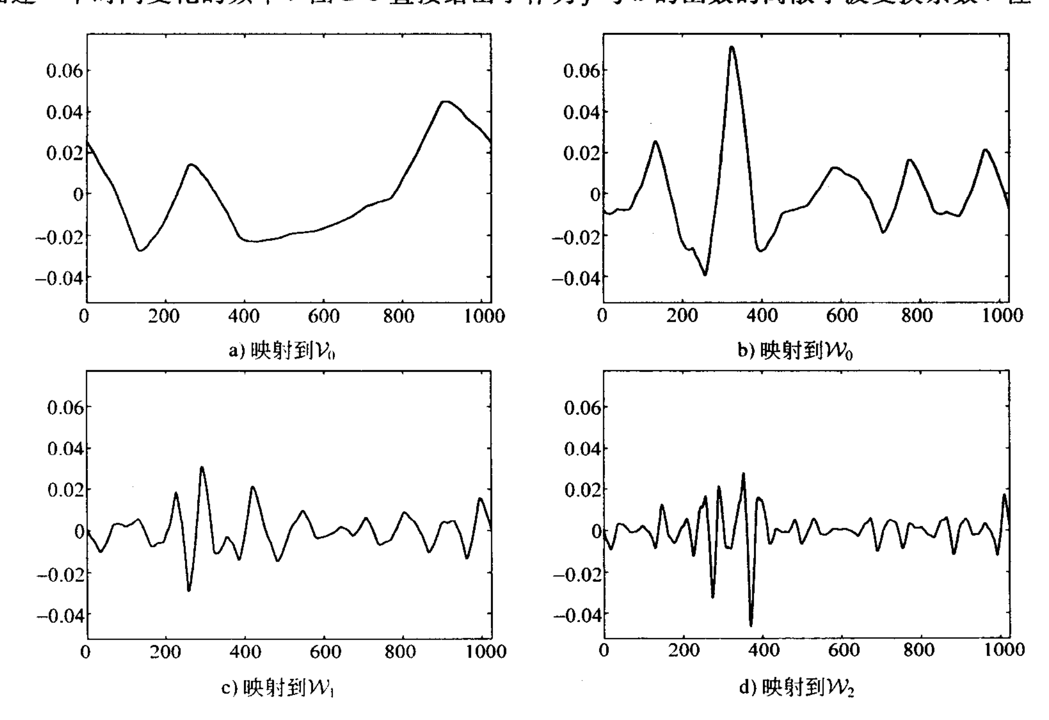


图 2-7 使用 $\psi_{D8'}$，休斯敦地平线信号到$\mathcal{W}$空间的映射

e) 映射到$\mathcal{W}_3$

f) 映射到$\mathcal{W}_4$

g) 映射到$\mathcal{W}_5$

h) 映射到$\mathcal{W}_6$

图 2-7 （续）

意，在信号中用傅里叶变换不能得到如何在 k 的位置跟踪频率．图 2-9 和图 2-10 展示了这个鸟叫信号的尺度函数逼近和小波分解．再次注意，在展示这种类型的信号时，如何表示频率的“位置”．

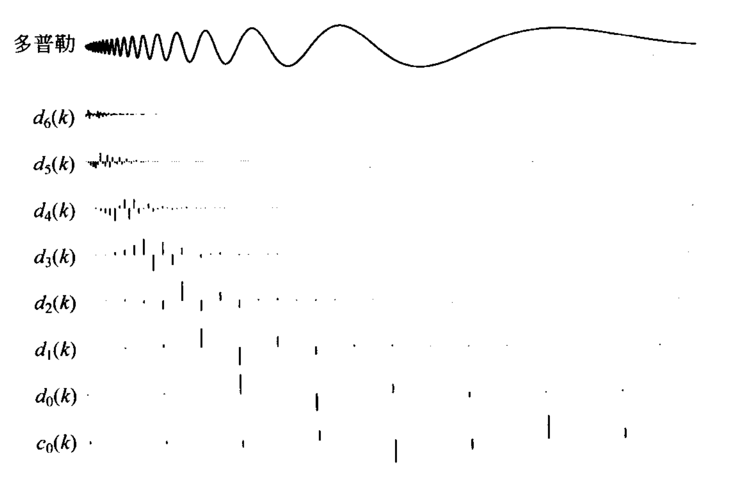


图 2-8 多普勒信号的离散小波变换，使用 $\psi_{D8'}$，对每个较高尺度放大$\sqrt{2}$倍

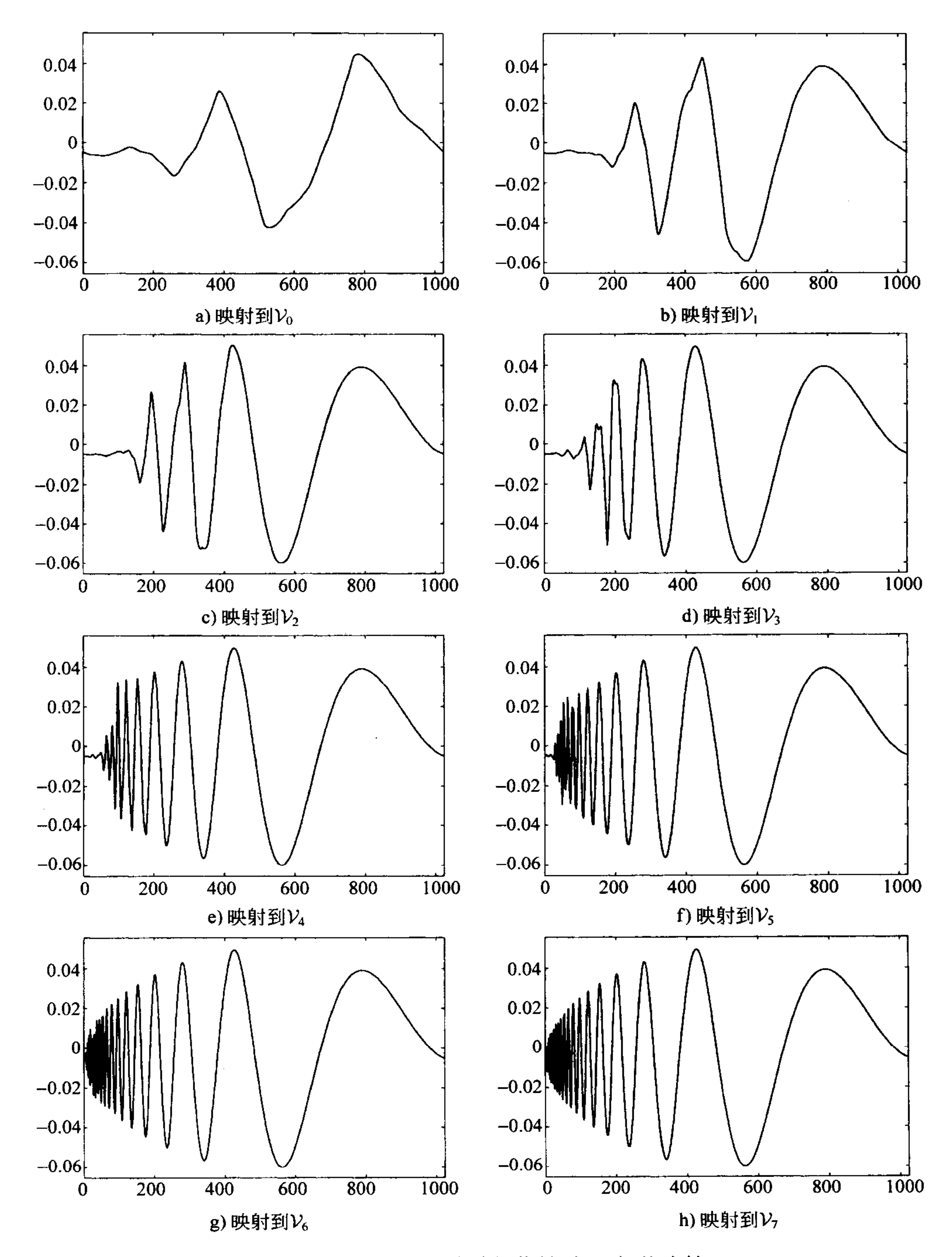


图 2-9　使用 $\phi_{D8'}$，多普勒信号到$\mathcal{V}$空间的映射

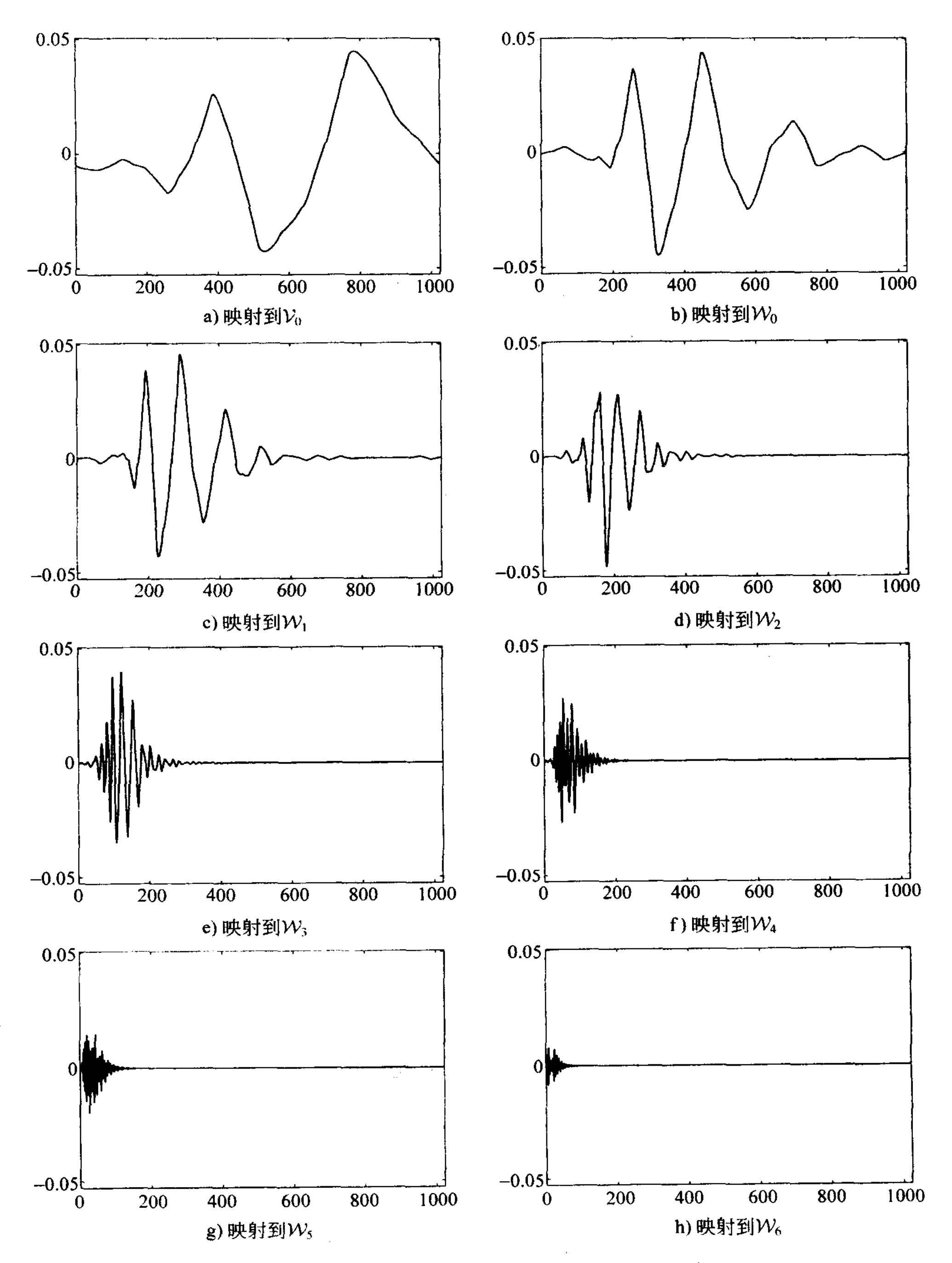


图 2-10 使用 $\psi_{D8'}$，多普勒信号到$\mathcal{W}$空间的映射

2.8 哈尔小波系统的例子

本节将用更复杂的例子来阐述我们在数学上的讨论．在 1910 年，哈尔[Haa10]证明了，确定的方波函数可以平移和伸缩以产生一个张成 L^2 空间的基底的集合，如图 2-11 所示．近年来看到了，哈尔系统是一个特殊的小波系统．

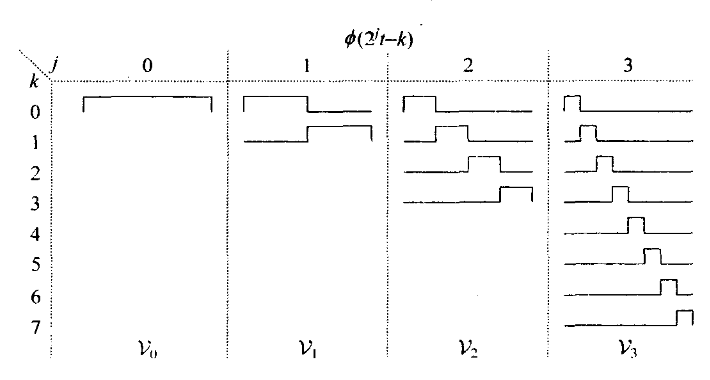


图 2-11 张成空间$\mathcal{V}_j$的哈尔尺度函数

如果我们选取在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 区间上具有紧支撑的尺度函数，那么(2.13)的一个解是尺度函数，这个尺度函数是一个简单的矩形函数

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & 若\ 0<t<1\\ 0 & 其他的,\end{cases} \tag{2.42}$$

满足只有两个非零系数 $h(0)=h(1)=1/\sqrt{2}$，并且(2.24)与(2.25)要求小波是

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & 对\ 0<t<0.5\\ -1 & 对\ 0.5<t<1\\ 0 & 其他的,\end{cases} \tag{2.43}$$

也满足只有两个非零系数 $h_1(0)=1/\sqrt{2}$和 $h_1(1)=-1/\sqrt{2}$.

$\mathcal{V}_0$是由 $\varphi(t-k)$张成的空间，这是在整数上的分段常数函数的空间，一个完全限定的空间，但不是平凡的．接下来的比较高的分辨率空间$\mathcal{V}_1$由 $\varphi(2t-k)$张成，它包含$\mathcal{V}_0$的信号类的一些更有用的信息．当考虑更高的尺度值 j 时，由 $\varphi(2^jt-k)$张成的空间$\mathcal{V}_j$用越来越精细的分段常值函数逼近任意的函数或信号．哈尔证明了当 $j\to\infty$ 时，$\mathcal{V}_j\to L^2$，于是我们有了一个由逼近任一平方可积函数的阶梯函数组成的逼近．

哈尔函数如图 2-11 所示，其中第一列包含张成$\mathcal{V}_0$的简单常数基函数，第二列包含 1/2 宽的单位脉冲和张成$\mathcal{V}_1$必须的平移，第三列包含 1/4 宽的脉冲的 4 个平移，并且第四列包含 1/8 宽的脉冲的 8 个平移．这清楚地表明了，为何尺度增加时，可以越来越多地了

22 ~ 25

解细节．然而，只使用尺度函数不能得到导引中所描述的分解，为此，我们需要小波．不同于$\mathcal{V}_3$中使用的尺度函数 $\varphi(8t-k)$，我们将使用正交分解

$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{W}_2, \tag{2.44}$$

这与

$$\overline{\operatorname{Span}_k\{\varphi(8t-k)\}} = \overline{\operatorname{Span}_k\{\varphi(4t-k)\}} \oplus \overline{\operatorname{Span}_k\{\psi(4t-k)\}} \tag{2.45}$$

相同，这是指，存在张成$\mathcal{V}_3$的两个正交基函数的集合，一个借助于 $j=3$ 的尺度函数，另一个借助于比较粗糙的 $j=2$ 尺度函数的一半，加上 $j=2$ 小波包含的细节，如图 2-12 所示．

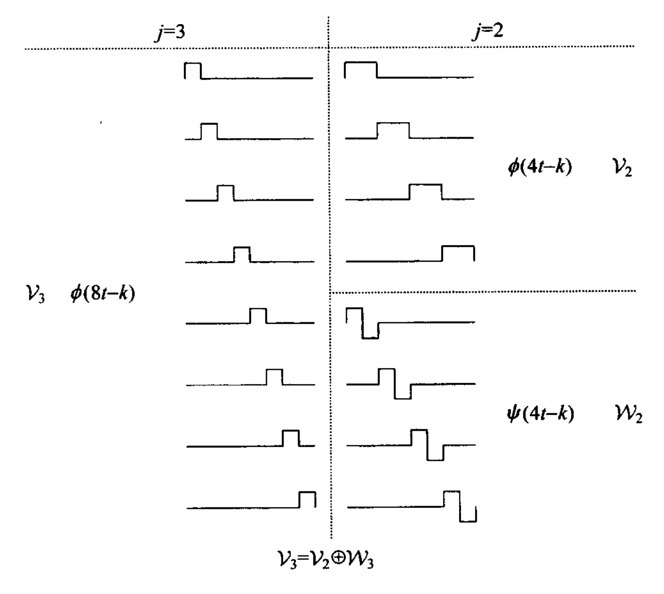


图 2-12　$\mathcal{V}_3$的哈尔尺度函数与小波分解

$\mathcal{V}_2$可以进一步分解为

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}_1, \tag{2.46}$$

这与

$$\overline{\operatorname{Span}_k\{\varphi(4t-k)\}} = \overline{\operatorname{Span}_k\{\varphi(2t-k)\}} \oplus \overline{\operatorname{Span}_k\{\psi(2t-k)\}}, \tag{2.47}$$

是相同的，如图 2-14 所示．这给出$\mathcal{V}_1$还可分解为

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0, \tag{2.48}$$

如图 2-13 所示．继续分解由尺度函数张成的空间，直到空间是一常数，可得$\mathcal{V}_3$的完全分解，这象征地表示在图 2-16 中．

最后，我们看由$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$中的基底元素构造的对一个光滑函数的逼近．

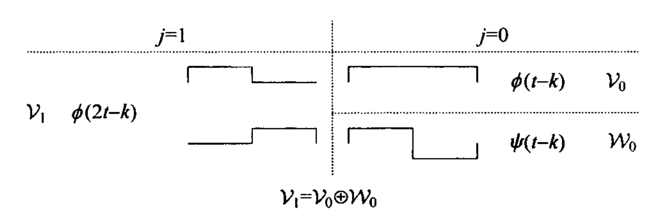


图 2-13 $\mathcal{V}_1$的哈尔尺度函数与小波分解

因为哈尔函数形成每个子空间的一组正交基，对于光滑函数，它们能产生最优的最小二乘逼近误差．我们可以很容易地想像，添加函数的一个较高分辨率的"层"到$\mathcal{W}_3$的作用，其中$\mathcal{W}_3$给出$\mathcal{V}_4$中存在的逼近．注意，这些函数满足我们对于尺度函数和小波考虑的所有条件．基小波确实是一个振荡函数，事实上，它具有零均值，并且它的伸缩与平移产生越来越细的细节．

尺度函数和小波系统的多分辨特性容易由图 2-12 看出，其中$\mathcal{V}_3$中的信号能表示为在尺度 $j=3$ 上的 8 个平移的尺度函数的和，或者表示为在尺度 $j=2$ 上的 4 个平移的尺度函数与 4 个平移的小波的和．在第二种情形，4 个尺度函数的和给出信号的一个低分辨率逼近，四个小波的和给出信号比较高的分辨率"细节"．4 个平移尺度函数可以进一步分解为更粗糙的尺度函数与小波，如图 2-14 所示，并且仍然能进一步分解，如图 2-13 所示．

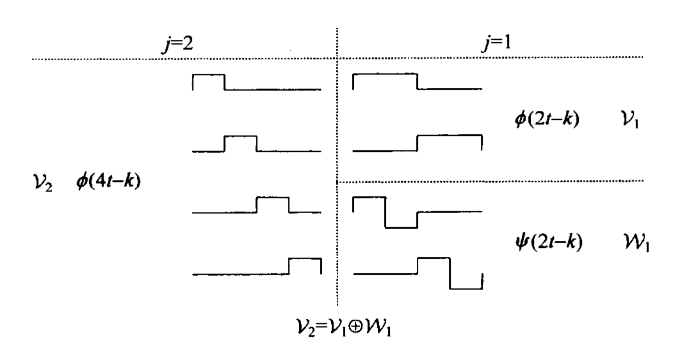


图 2-14 $\mathcal{V}_2$的哈尔尺度函数与小波分解

图 2-15 展示了在不同的分辨率下一个试验函数的哈尔逼近．信号是在傅里叶域完美局部化的一个纯正弦波和在时域中完全局部化的两个不连续的波的一种混合的例子．在最粗尺度上的分量仅是信号的平均，当包含越来越多的小波尺度时，逼近变得接近原始信号．

本章省略了总结该方法的一般概念方面的一些细节．可以满足或者必须满足的条件、得到的性质以及例子一起在下面的章节和/或参考文献中讨论了．

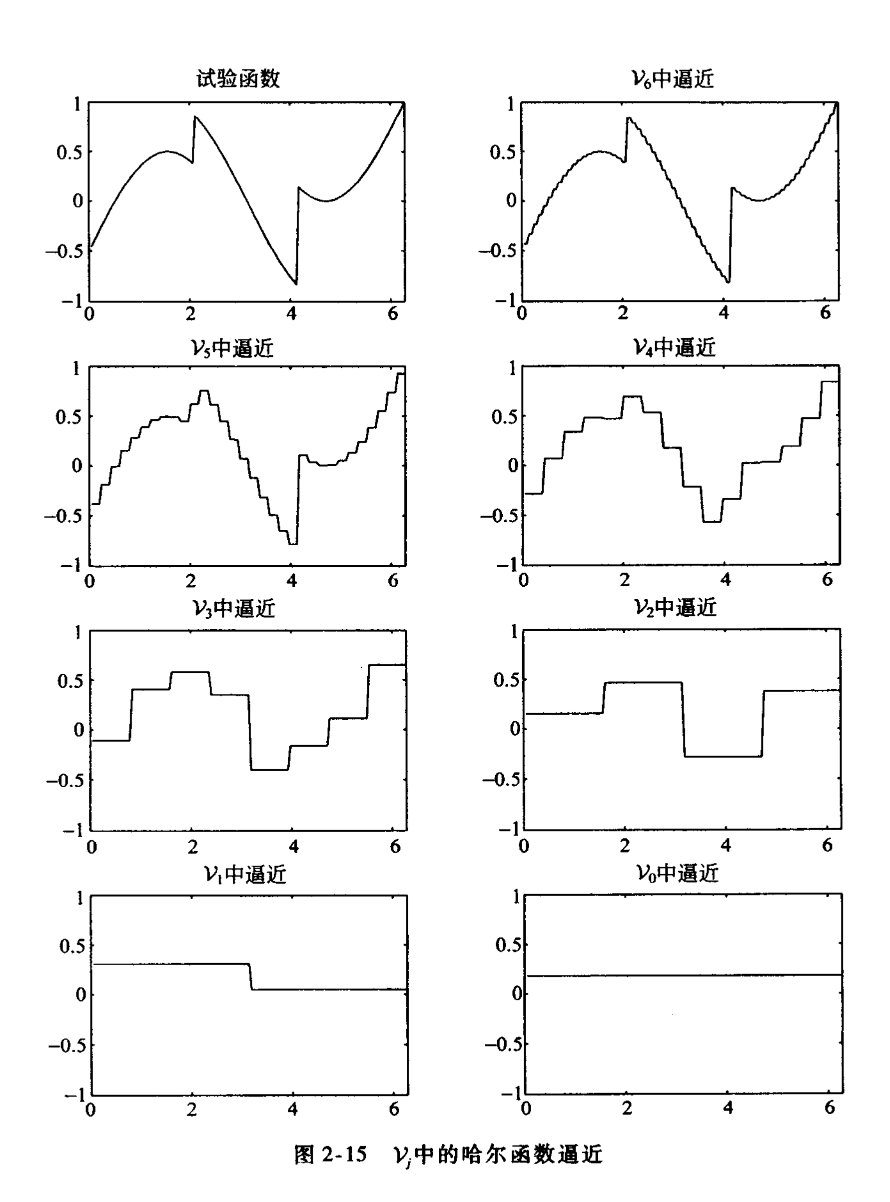
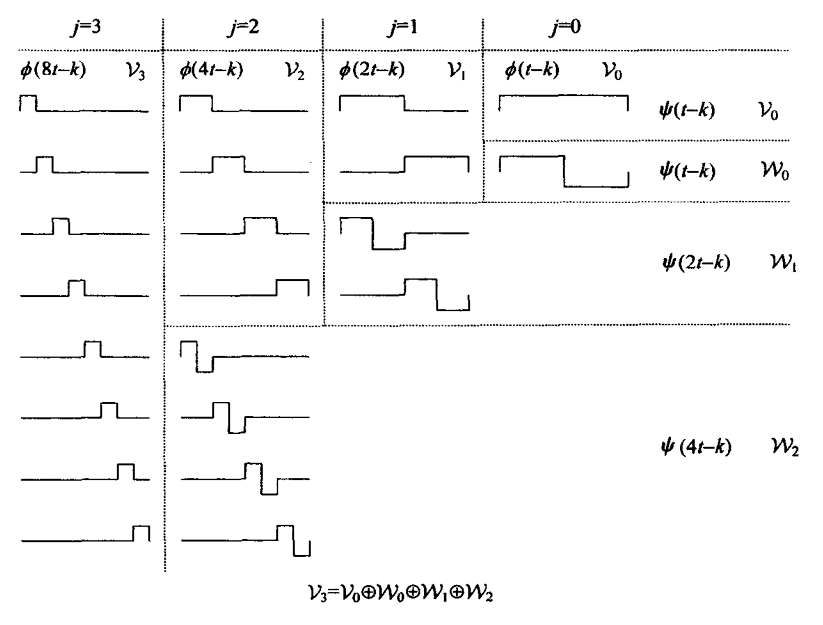


图 2-15 $\mathcal{V}_j$中的哈尔函数逼近



$\mathcal{V}_3=\mathcal{V}_0\oplus\mathcal{W}_0\oplus\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2$

图 2-16 $\mathcal{V}_3$的哈尔尺度函数与小波分解

26
~
30

第3章　滤波器组与离散小波变换

在许多应用中，我们不需要直接处理尺度函数或小波，只需要考虑式(2.13)与(2.24)中的系数 $h(n)$ 和 $h_1(n)$ 以及展开式(2.28)、(2.29)和(2.30)中的 $c(k)$ 与 $d_j(k)$，并且它们分别可以看作是数字滤波器和数字信号[GB92c, Vai92]. 虽然只使用滤波器组就可以导出大多数小波理论的结果，但是为了实际地了解这个新的工具，我们仍认为，信号展开的观点和滤波器组的观点是必要的.

3.1　分析——由细尺度到粗尺度

为了直接地处理小波变换系数，我们将推导在低尺度水平展开系数与在高尺度上借助这些系数展开之间的关系. 由(2.13)的基本递推方程出发

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \tag{3.1}$$

并且假定存在唯一解，由伸缩和平移时间变量给出

$$\begin{aligned}\varphi(2^j t-k) &= \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2(2^j t-k)-n) \\ &= \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t-2k-n),\end{aligned} \tag{3.2}$$

在变量替换 $m=2k+n$ 之后，这变成

$$\varphi(2^j t-k) = \sum_m h(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t-m). \tag{3.3}$$

如果表示 $\mathcal{V}_j$ 为：

$$\mathcal{V}_j = \operatorname*{Span}_k\{2^{j/2}\varphi(2^j t-k)\}, \tag{3.4}$$

那么

31

$$f(t)\in\mathcal{V}_{j+1} \;\Rightarrow\; f(t) = \sum_k c_{j+1}(k)2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}t-k) \tag{3.5}$$

是在 $j+1$ 尺度、只用尺度函数而没有用小波的表示. 在一个尺度较低的分辨率下，对于在 j 尺度不可能得到的"细节"，小波是必需的. 我们有

$$f(t) = \sum_k c_j(k)2^{j/2}\varphi(2^j t-k) + \sum_k d_j(k)2^{j/2}\psi(2^j t-k), \tag{3.6}$$

其中，$2^{j/2}$ 项保持在不同尺度上基函数的单位范数. 如果 $\varphi_{j,k}(t)$ 和 $\psi_{j,k}(t)$ 是规范正交的，或者是一个紧框架，j 水平尺度系数可由取内积求得：

$$c_j(k) = \langle f(t),\varphi_{j,k}(t)\rangle = \int f(t)2^{j/2}\varphi(2^j t-k)\,\mathrm{d}t, \tag{3.7}$$

使用(3.3)及交换和与积分的次序，这可以写为

$$c_j(k) = \sum_m h(m-2k)\int f(t)2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}t-m)\mathrm{d}t, \tag{3.8}$$

而积分是在 $j+1$ 尺度上与尺度函数的内积，这给出

$$\boxed{c_j(k) = \sum_m h(m-2k)c_{j+1}(m).} \tag{3.9}$$

小波系数相应的关系式是

$$\boxed{d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m).} \tag{3.10}$$

滤波和下抽样或抽取

在数字信号处理中，一个数值序列(输入信号)的“滤波”由序列与另一个数的集合的卷积得到，这另一个数的集合称为滤波器系数、抽头、权或脉冲响应．这是指，你是否想带有加权的系数运动平均．对于一个输入序列 $x(n)$ 和滤波器系数 $h(n)$，输出序列 $y(n)$ 用下式给出：

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k), \tag{3.11}$$

有大量关于数字滤波器以及如何设计它们[PB87，OS89]的文献．如果滤波器系数的数目 N 是有限的，则这个滤波器称为有限脉冲响应(FIR)滤波器．如果这个数目是无限的，则它称为无限脉冲响应(IIR)滤波器．这种设计的问题是选取 $h(n)$，以得到一些想要的效果，经常是去除噪声或分离信号[OS89，PB87].

在多级数字滤波器中，信号 $x(n)$ 的整数指标 n 和时间之间有一种设定的关系，通常，数值序列是时间函数的简单等距抽样．在多级滤波器中，两个基本运算是下抽样和上抽样．下抽样(有时简称为下样或抽取)取一个信号 $x(n)$ 作为输入，而产生一个 $y(n)=x(2n)$ 的输出，这个象征性的表示如图 3-1 所示．在某些情况下，下抽样用一个不是 2 的因子代替，并且在某些情况下，输出是奇指标项 $y(n)=x(2n+1)$，而如果这是重要的，我们将明确指明它．

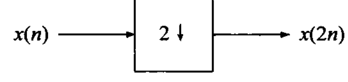


图 3-1 下抽样或抽取

在下抽样中，显然，可能丢失信息，因为抛弃了数据的一半．在频域(傅里叶变换)的效果称为混淆现象，它描述这个信息丢失的结果为频域分量的混合[PB87，OS89]．只有原信号是带限的(傅里叶系数的一半是零)，下抽样才不会引起信息丢失．

我们讨论数字滤波和下抽样，因为那恰好是(3.9)与(3.10)所做的．这些方程表明，在尺度的不同水平上，尺度系数与小波系数可以按以下方式得到：用时间反转的递推系数 $h(-n)$ 和 $h_1(-n)$ 与在尺度 j 的展开系数作卷积，然后下抽样或抽取(每隔一选一，选偶数项)，以给出在下一 $j-1$ 水平的展开系数．换句话说，用具有系数 $h(-n)$ 和 $h_1(-n)$ 的两个有限脉冲响应数字滤波器“滤波”尺度 j 系数，然后下抽样，给出下一个比较粗糙的尺度系数和小波系数．这些结构实现 Mallat 算法[Mal89b，Mal89c]，并且在关于滤波器组的工程文献

中发展了正交镜像滤波器(QMF)、共轭滤波器和完全重构滤波器组[SB86a, SB87, Vet86, VG89, Vet87, Vai87a, Vai92], 有些将在本书的第8章详述. Mallat、Daubechies 等人证明了小波系数计算和滤波器组的关系. 方程(3.9)与(3.10)的实现过程如图3-2所示, 其中向下指的箭头表示抽取或者下2抽样, 其他方框表示有限脉冲响应滤波, 或者用$h(-n)$或者用$h_1(-n)$作卷积. 为方便表示, 我们用$h(n)$与$h_0(n)$表示伸缩方程(2.13)的尺度函数的系数.

32 ~ 33

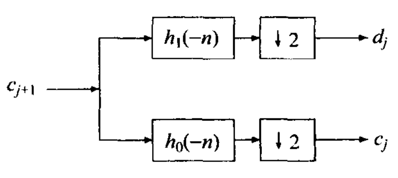


图3-2 2带分析组合

正如将在第5章中看到的那样, 用$h(-n)$实现的有限脉冲响应滤波器是一个低通滤波器, 而用$h_1(-n)$实现的有限脉冲响应滤波器是一个高通滤波器. 注意, 这个系统的数据点的平均输出数目与输入数目是相同的. 数目是保持两个滤波器的2倍, 然后用抽取减半, 变回到原来的数目. 这是指, 有可能没有信息丢失, 并且能完全地恢复原信号. 如同我们将看到的, 的确是这种情况, 在上组中出现的"混淆现象"可以使用下组的信号抵消. 这是滤波器组理论[Vai92, Fli94]中完全重构背后的概念.

这种分裂、滤波和抽取可以在尺度系数上重复, 以给出如图3-3所示的两尺度结构. 在尺度系数上重复这个过程称为迭代滤波器组(iterating filter bank). 迭代滤波器组再次给出了如图3-4所示的三尺度结构.

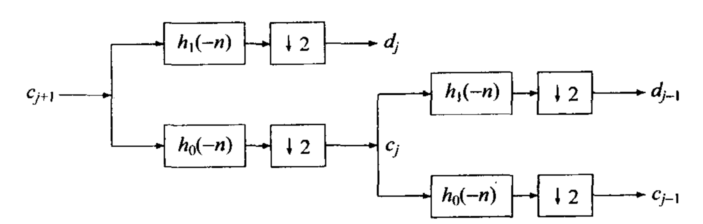


图3-3 两级2带分析树

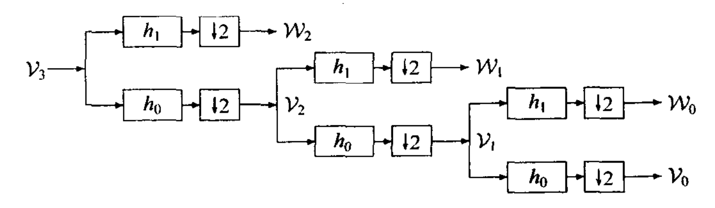


图3-4 三级2带分析树

一个数字滤波器的频率响应是它的脉冲响应(系数)$h(n)$的离散时间傅里叶变换. 这用下式给出:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{i\omega n}. \tag{3.12}$$

对于在每秒弧度频率 ω 的抽样正弦曲线，这个复值函数的模给出了滤波器输出与输入的比率，$H(\omega)$的幅角是输出和输入之间的相位位移.

2 带的第一步将 $c_{j+1}(k)$的谱分为一个低通带和一个高通带，得到在较低尺度的尺度系数 $c_j(k)$和小波系数 $d_j(k)$. 然后，第二步将低通带分为另外的较低的低通带和一个通带(bandpass band). 第一步将谱分为相等的两部分，第二步将较低的一半分为 1/4，以此类推，这导致带宽的一个对数集合，如图 3-5 所示. 在滤波器组语言中，这些称为"常数 Q"滤波器，因为带宽与带的中心频率之比是常数. 注意，音乐的音阶以类似的方式定义八度音阶，并且耳朵对频率以一个相似的对数方式响应.

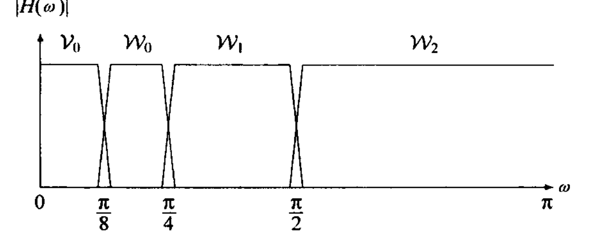


图 3-5 分析树的频带

对于任一实际的带限信号，将有一个较高(上)的尺度 $j=J$，这个尺度的小波系数 $d_J(k)$很小，可以忽略不计[GOB94]. 从借助于尺度系数 c_J 的一个信号的高分辨阐述出发，分析树计算离散小波变换直到与低的分辨率($j=j_0$)一样用 $J-j_0$ 步描述. 所以，对于$f(t)\in\mathcal{V}_J$，使用(2.8)，有

$$f(t)=\sum_k c_J(k)\varphi_{J,k}(t) \tag{3.13}$$

$$=\sum_k c_{J-1}(k)\varphi_{J-1,k}(t)+\sum_k d_{J-1}(k)\psi_{J-1,k}(t), \tag{3.14}$$

$$f(t)=\sum_k c_{J-2}(k)\varphi_{J-2,k}(t)+\sum_k\sum_{j=J-2}^{J-1} d_j(k)\psi_{j,k}(t), \tag{3.15}$$

$$f(t)=\sum_k c_{j_0}(k)\varphi_{j_0,k}(t)+\sum_k\sum_{j=j_0}^{J-1} d_j(k)\psi_{j,k}(t), \tag{3.16}$$

这是(2.33)的一个有限尺度形式. 我们将在第 9 章进一步讨论 j_0 与 J 的选择.

34
~
35

3.2 综合——由粗尺度到细尺度

正如我们所期望的，信号原来的细尺度系数能由粗的分辨率下的尺度函数与小波系数的结合得到. 这由考虑 $j+1$ 尺度函数空间$f(t)\in\mathcal{V}_{j+1}$中的信号导出，这个函数可以借助于尺度函数写为

$$f(t)=\sum_k c_{j+1}(k)2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}t-k), \tag{3.17}$$

或者借助于下一尺度(这还需要小波)写为

$$f(t)=\sum_k c_j(k)2^{j/2}\varphi(2^jt-k)+\sum_k d_j(k)2^{j/2}\psi(2^jt-k). \tag{3.18}$$

把(3.1)和(2.24)代入(3.18)给出

$$f(t) = \sum_k c_j(k) \sum_n h(n) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}t - 2k - n) + \sum_k d_j(k) \sum_n h_1(n) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}t - 2k - n). \tag{3.19}$$

因为所有这些函数都是规范正交的，用 $\varphi(2^{j+1}t - k')$ 乘(3.17)和(3.19)，并且用积分计算出系数为

$$\boxed{c_{j+1}(k) = \sum_m c_j(m) h(k - 2m) + \sum_m d_j(m) h_1(k - 2m).} \tag{3.20}$$

滤波和上抽样或伸长

对于在滤波器组中的综合，我们首先有一个上抽样或伸长的序列，然后滤波．这是指，滤波器的输入具有在原有项之间插入的零序列．换句话说，

$$y(2n) = x(n) \quad 和 \quad y(2n+1) = 0, \tag{3.21}$$

其中输入信号伸长为它原来长的2倍，并且插入了零．显然，这种上抽样或伸长可以做到2以外的因子，并且上述两个方程可以具有 $x(n)$ 和0的反转．显然，上抽样没有损失任何信息．如果首先上抽样，然后下抽样，则返回到出发的地方．然而，如果首先下抽样，然后上抽样，则一般不能返回到出发的地方．

这里讨论滤波和上抽样是因为这恰好是综合运算(3.20)所做的．这个方程是用上抽样 j 层尺度系数序列 c_j 来计算的，这是指，通过在两项之间插入零得到2倍的长度，然后用它与尺度系数 $h(n)$ 作卷积．对第 j 层小波系数序列，做法相同，并且相加给出第 $j+1$ 层的尺度函数系数，这个结构如图3-6所示，其中 $g_0(n) = h(n)$，$g_1(n) = h_1(n)$．通过结合适当尺度的小波系数，这个结合过程可以继续到任一水平，得到的两尺度树如图3-7中所示．

36

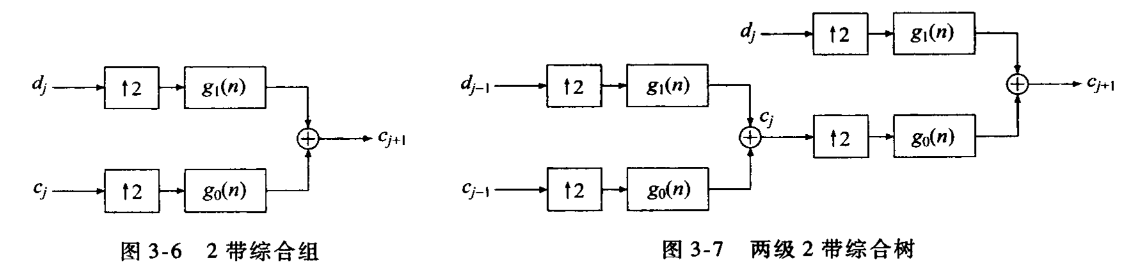


图3-6　2带综合组

图3-7　两级2带综合树

3.3 输入系数

我们可能想知道怎样由图3-2与图3-3所示的系统中使用的信号得到输入尺度系数的集合 c_{j+1}．对于充分高的尺度，尺度函数作用像“δ 函数”与高尺度系数计算内积，和 $f(t)$ 的抽样简直一样[GOB92，OGB92]．如果 $f(t)$ 的抽样超过奈奎斯特(Nyquist)速率，那

么它们在这个尺度上对尺度系数是好的逼近，这是指，在这个尺度上没有小波系数是必要的．如果尺度函数的矩是零或者很小，那么这个逼近是一个特别好的逼近．这些概念将在6.8节和第9章中进一步讨论．

另一种方法是“预滤波”信号抽样，以使得它们更好地逼近展开系数，这已在[Str86]中讨论．

这组分析与综合运算是著名的Mallat算法[Mal89b，Mal89c]．分析滤波器组使用数字滤波器组和下抽样有效地计算离散小波变换，而综合滤波器组计算离散小波逆变换，由变换重构信号．虽然这里给出了计算离散小波变换的一种方法，但是滤波器组描述给出洞悉变换本身，以及暗示由小波展开观点直接看到修改和推广将是困难的．在本书的剩余章节中，将更广泛地使用滤波器组．滤波器组更一般的研究将在7.2节中给出．

37

虽然一个纯小波展开可能与(1.7)和(2.22)中的表示相同，但小波的性质最好是通过尺度函数研究与了解．如果尺度函数具有紧支撑，这当然成立，因为小波是由(2.24)中给定的尺度函数的有限和组成的．

在实际的情况中，小波展开或小波变换用于作为信号处理或数值分析中的一个计算工具，展开可以是有限的．如果基函数具有有限支撑，那么在k上求和只有有限数目是必需的．如果尺度函数如同在(2.82)或(3.6)中的尺度函数，那么在j上求和的下限是有限的．如果信号本质上是带限的，那么存在一个尺度，超过这个尺度有少许能量或没有能量，并且上限可以是有限的，这将在第9章中描述．

3.4 点阵和提升

交替使用基本的2带树结构的滤波器组是一个点阵(lattice)结构滤波器组，因为(2.25)中给定的尺度滤波器$h(n)$与小波滤波器$h_1(n)$之间的关系，所以一些计算可以与运算中一个有效的储存同时进行，这将在第9章中叙述[Vai92]．

计算离散小波变换和计算尺度函数与小波本身的另一种方法，称为“提升(lifting)”．虽然它与其他的方法有关系[Mar92，Mar93，DM93，KS92]，但是这个概念首先是由Wim Sweldens解释为基于插值的一种时域构造[Swe95]．提升不使用傅里叶方法，并且与本章的方法相比，可以应用于更一般的问题(例如，非均匀抽样)，首先应用于双正交系统[Swe96a]，并且之后扩展到正交系统[DS96a]．提升应用于双正交系统在本书7.4节中介绍．基于提升的实现在运算效率方面也得到了与点阵结构同样的改善．

3.5 不同的观点

3.5.1 多分辨分析与时频分析

小波分解和离散小波变换的发展至今还是借助于多分辨，其中考虑较高尺度的小波分量为一个较低尺度信号或图像上的“细节”．这的确是一个有力的观点，并且对于许多信号

与图像，这是一个正确的模型，但是还有其他的情形，其中一个在不同尺度和/或时间上合成信号的分量是无关的，或者至少不是彼此的细节．如果把一个音乐的乐谱看作一个小波分解，那么高阶音符就不是低阶音符的细节，它们是无关的音符．这第二种观点是时-频分析或时间-尺度分析方法比较好的一种[Coh89、Coh95、HB92、Boa92、LP89]，并且可以同小波包(见7.3节)、*M*带小波(见7.2节)或一种冗余的表示(见7.6节)一起比较好地发展，但将仍然是由一些短的滤波器组实现．

3.5.2 周期离散小波变换与非周期离散小波变换

和傅里叶级数不同，离散小波变换可以写为一个周期的变换或一个非周期的变换．直 38 到现在，我们考虑了在 $-\infty<t<\infty$ 上的一个非周期的级数展开(2.33)，而计算是从每个尺度的系数串出发用滤波器组得到．如果对滤波器组的输入有一个确定的定额，那么在下一个较低的尺度上的输出就是两个序列，一个尺度函数系数序列 $c_{j-1,k-1}$ 和一个小波系数序列 $d_{j-1,k-1}$，下抽样后，每一个序列长是输入定额的一半．在下一个较低尺度上，在尺度系数上进行同样的过程以给出全部三串输出，一串是定额的一半，两串是定额的1/4. 换句话说，小波变换系数的计算是一个多级滤波器组，此滤波器组在不同定额上产生系数序列，但是在任一级上的平均数是相同的．这种方法可以应用于任一信号，长度是有限的或无限的、周期的或非周期的．注意，虽然平均输出的定额与平均输入的定额相同，但是输出系数的数目比输入系数的数目大，这是因为卷积的输出长度大于输入长度．

应用于有限时间信号或(像傅里叶级数那样的)周期信号的一个替换公式是使得所有的滤波器组循环滤波，或对于 $n,\ \ell=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$，用

$$y(n)=\sum_{\ell=0}^{N-1}h(\ell)x(n-\ell), \tag{3.22}$$

定义的周期卷积，并且所有的指标与变换是模 N 计算的．对于在尺度 $j=J$ 上的一个长度 N 的输入，我们在一步后有两个长度$N/2$的序列，在两步后，有一个长度$N/2$和两个长度$N/4$的序列，依此类推，如果 $N=2^J$，这可以重复 J 次而最后一步长度是1，一个尺度函数系数和一个小波系数．一个长度8的周期离散小波变换的例子如图3-8所示．

$c_j(k)$	$d_j(k)$	$d_{j+1}(k)$　$d_{j+1}(k+1)$	$d_{j+2}(k)$　$d_{j+2}(k+1)$　$d_{j+2}(k+2)$　$d_{j+2}(k+3)$

图3-8　长度为8的离散小波变换向量

这种周期方法的细节在第9章中讨论，这表明在这个系统中存在因为周期卷积(3.22)而发生的混淆现象．这种公式化是特别清楚的，因为在变换中与在信号中有相同数目的项．这可以用一个具有简单逆的方阵表示，而这个逆具有有趣的结构．这也可以用快速傅里叶变换有效地计算，虽然对于大多数应用是不必要的．

对于大多数理论上的发展或概念上的目的，这两种公式化中有一点差别．然而，在实际的计算和应用中，你将确定要用的软件包或用以计算的软件包．与傅里叶的情形一样，

你可以通过用 0 来填塞信号使用周期形式去计算非周期的变换，但是会损失一些周期公式给出的效能．

3.5.3 离散小波变换与离散时间小波变换

由基于信号展开或者多级数字滤波的两种观点，来看一看本书中的信号处理方法．我们可以看到，Mallat 算法或者作为在不同的尺度上计算展开系数的方法，或者作为处理离散时间信号的一个滤波器组．第一种观点类似于傅里叶级数的使用，将一个连续的函数变换为离散系数序列．第二种观点类似于离散傅里叶变换，将一个离散的函数变换为离散函数．事实上，离散傅里叶变换(通过快速傅里叶变换)通常用于计算傅里叶级数的系数，但是，必须细心，以避免或极小化混淆现象．这些观点的差别部分来自于不同的研究者们的背景(即，他们是"小波人群"还是"滤波器组人群")．然而，使用信号的级数展开(使用离散小波变换)与在信号的抽样上使用多级数字滤波器组(使用离散时间小波变换)之间确实有极细微的差别．一般地，使用两种观点更能透彻地理解一个问题，而不是完成这一问题．级数展开是本书的主要方法，但是滤波器组和离散时间小波变换也在 7.8 节与第 8 章中讨论了．

39

3.5.4 离散小波变换的数值复杂性

数学运算(浮点乘法和加法)次数的分析表明，一个长度 N 的数列的离散时间小波变换，使用带有滤波器组的 Mallat 算法的计算需要 $O(N)$次运算．换句话说，运算的次数与信号的长度是线性的，此外，线性性的常数相对小．这与计算离散傅里叶变换的快速傅里叶变换算法大不相同，其中计算快速傅里叶变换的复杂性是 $O(N\log(N))$或者直接计算一个离散傅里叶变换需要 $O(N^2)$次运算．通常说快速傅里叶变换算法是基于一种"分配与征服"方式的，而这是一种误解．过程最好描述为一种"组织与共用"方式．效率(事实上，最优效率)是基于组织计算使得冗余的运算可以是共用的．Mallat 算法的级联的滤波和下抽样做的是同样的事情．

我们将不会在快速傅里叶变换与离散时间小波变换的复杂性之间制造太多的这类差别，这来自于具有一个对数频带分割的离散时间小波变换，和具有一个均匀分割的快速傅里叶变换．这个对数尺度对于许多信号是适合的，但是如果一个均匀分割用于小波系统，例如小波包(见 7.3 节)或冗余离散小波变换(见 7.6 节)，小波系统的复杂性变成了 $O(N\log N)$．

如果你对离散小波变换与离散时间小波变换的更多的细节、它们之间的关系、计算它们的方法、它们进一步的性质或者例子感兴趣，那么见 7.8 节和第 9 章．

40

第4章 基、正交基、双正交基、框架、紧框架和无约束基

大多数有技术背景的人都通晓向量展开或基向量以及正交性的概念，然而，相关的双正交或框架以及紧框架的概念却较少有人通晓，但是这也是重要的．在小波系统的研究中，我们发现，框架和紧框架是必需要了解的，至少应该达到表面了解的水平．详细地，我们可以在[You80，Dau92，Dau90，HW89]中找到．另外的或许是不熟悉的概念是 Donoho 和 Daubechies 等人使用的无约束基[Don93b，Mey90，Dau92]，以说明为什么小波对于信号压缩、检测和去噪是好的[GOL*94b，GOL*94a]．本章中简要地定义和讨论这些概念．你可以跳过这几节，稍后当具体需要时再参考它们．

4.1 基、正交基和双正交基

向量或函数$f_k(t)$的一个集合张成向量空间$\mathcal{F}$(或$\mathcal{F}$是一个集的张成)，如果这个空间的任一元素可以表示为这个集合元素的线性组合，即给定函数$f_k(t)$的有限或无限集合，定义 $\text{Span}_k\{f_k\}=\mathcal{F}$为向量空间，这个空间的所有元素形如

$$g(t) = \sum_k a_k f_k(t), \tag{4.1}$$

其中$k\in \mathbf{Z}$，且t，$a\in \mathbf{R}$. 这个空间的内积是通常所定义的，并且表示为$\langle f(t), g(t)\rangle$. 定义并表示范数(norm)为$\|f\|=\sqrt{\langle f, f\rangle}$.

我们说，集合$f_k(t)$对于给定的空间$\mathcal{F}$是一个*基集合*(basis set)或一组*基*，如果在(4.1)中$\{a_k\}$的集合对于任一特定的$g(t)\in\mathcal{F}$是唯一的．如果对于所有的$k\neq\ell$，$\langle f_k(t), f_\ell(t)\rangle=0$，那么称这个集为一组*正交基*(orthogonal basis). 如果是在三维欧几里得空间中，那么正交基向量是彼此夹角为直角(90°)的坐标向量．这个集称为一组规范正交基，如果$\langle f_k(t), f_\ell(t)\rangle=\delta(k-\ell)$，即如果基向量是正交的且规范化为单位范数：$\|f_k\|=1$，对所有$k$成立．

41

由这些定义，显然，如果有一组规范正交基，那么就能表示这个向量空间中的任一元素$g(t)\in\mathcal{F}$，(4.1)写为

$$g(t) = \sum_k \langle g(t), f_k(t)\rangle f_k(t), \tag{4.2}$$

因为在(4.1)两边取与$f_k(t)$的内积，得到

$$a_k = \langle g(t), f_k(t)\rangle, \tag{4.3}$$

其中信号$g(t)$与基向量$f_k(t)$的这个内积"替换"相应的系数a_k，这个展开式或表示式是非常有价值的．在下述意义上表示式(4.2)为恒等算子：在$g(t)$上的内积运算产生一个系数

集，当系数集用于基向量线性组合时，返回给出原信号 $g(t)$. 这是帕塞瓦尔定理的基础，这个定理说，范数或者能量可以借助于展开系数 a_k 分配．这就是系数的插值、存储、传递、逼近、压缩以及控制有用的原因．事实上，(4.2)是所有傅里叶型方法的形式．

虽然规范正交基的优点是显然的，但是也存在问题要求的基底不正交或不可以(或许不应该)正交的情形．对于这些情形，我们仍然可以有(4.1)的表示，并且，类似于(4.2)使用对偶基集合$\tilde{f}_k(t)$完成，这个对偶基集合$\tilde{f}_k(t)$的元素彼此之间不是正交的，但对于相应的展开集的元素有

$$\langle f_\ell(t), \tilde{f}_k(t)\rangle = \delta(\ell - k). \tag{4.4}$$

因为这种形式的"双正交性"需要两个向量集、展开集和对偶集，所以系统称为双正交的．在(4.1)展开中使用(4.4)给出

$$g(t) = \sum_k \langle g(t), \quad \tilde{f}_k(t)\rangle f_k(t). \tag{4.5}$$

虽然一个双正交系统更复杂，不仅需要原来的展开集，而且需要对偶向量集的寻找、计算和存储，但是这是很普遍的并且允许一个比较大的展开类．然而，如果一些基向量是强相关的，那么同一个双正交系统一起，可能有比较大的数值问题．

在(4.3)中使用内积计算展开系数称为完整过程的分析(analysis)部分，并且在(4.1)中由系数和展开向量计算信号称为综合(synthesis)部分．

在有限维情形，分析与综合是简单的矩阵-向量相乘．如果(4.1)中的展开向量是一组基，综合矩阵以这些基向量为列，矩阵是方阵且是非奇异的．如果矩阵是正交的，那么它的行和列是正交的，它的逆是它的转置，并且恒等算子是矩阵乘以它的转置矩阵．如果矩阵不是正交的，那么恒等算子是矩阵乘以它的逆矩阵，并且对偶基由逆矩阵的行组成．如果矩阵是奇异的，那么它的列不是线性无关的，所以不形成一组基． 42

4.1.1 矩阵的例子

使用一个具有矩阵的4维空间说明本章的概念,综合公式 $g(t) = \sum_k a_k f_k(t)$ 变为

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} f_3(0) \\ f_3(1) \\ f_3(2) \\ f_3(3) \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

这可以紧凑地写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_0(1) & f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_0(2) & f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \\ f_0(3) & f_1(3) & f_2(3) & f_3(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

综合或展开公式(4.1)或(4.7)为

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{a}, \tag{4.8}$$

左边列向量 $\boldsymbol{g}$ 是信号向量，矩阵 $\boldsymbol{F}$ 以基向量 $\boldsymbol{f}_k$ 为列，并且右边向量 $\boldsymbol{a}$ 包含 4 个展开系数 a_k.

在(4.6)中计算第 k 个展开系数的公式是

$$a_k = \langle g(t), \tilde{f}_k(t)\rangle = \tilde{\boldsymbol{f}}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}, \tag{4.9}$$

这可以写为向量形式

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(0) & \tilde{f}_0(1) & \tilde{f}_0(2) & \tilde{f}_0(3) \\ \tilde{f}_1(0) & \tilde{f}_1(1) & \tilde{f}_1(2) & \tilde{f}_1(3) \\ \tilde{f}_2(0) & \tilde{f}_2(1) & \tilde{f}_2(2) & \tilde{f}_2(3) \\ \tilde{f}_3(0) & \tilde{f}_3(1) & \tilde{f}_3(2) & \tilde{f}_3(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

其中每个 a_k 是 $\tilde{\boldsymbol{F}}^T$ 的第 k 行与 $\boldsymbol{g}$ 的内积，并且分析或系数公式(4.3)或(4.10)变成

$$\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}, \tag{4.11}$$

这同时是(4.2)或

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}\tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}. \tag{4.12}$$

所以

$$\tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{-1}, \tag{4.13}$$

求出了(4.4)中的对偶基.

如果 $\boldsymbol{F}$ 的列之间是正交的和规范的，那么

43

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}. \tag{4.14}$$

这是指，基和对偶基是相同的，并且式(4.12)和(4.13)变为

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}, \tag{4.15}$$

和

$$\tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}, \tag{4.16}$$

这两个式子都比(4.13)简单且更数值稳定.

离散傅里叶变换（DFT）是具有正交基向量的有限维傅里叶变换的一个例子，其中矩阵和向量技巧可以作为离散傅里叶变换的特征与性质的信息传递. 这些可以在一些信号处理的书中找到.

4.1.2 傅里叶级数的例子

傅里叶级数是无限维重构(综合)与分解(分析)的一个非常好的例子. 对于在 $0 < x < 2\pi$ 区间上的偶函数 $g(t)$，展开公式是

$$g(t) = \sum_k a_k \cos(kt), \tag{4.17}$$

其中基向量(函数)是

$$f_k(t) = \cos(kt), \tag{4.18}$$

并且展开的系数由

$$a_k = \langle g(t), f_k(t)\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(kt)\,dx, \tag{4.19}$$

得到．通过验证

$$\langle f_\ell(t), f_k(t)\rangle = \delta(k-\ell), \tag{4.20}$$

容易看到，基向量集是正交的．这些基函数张成一个无限维空间，并且必须检验(4.17)的收敛性．事实上，在本章无约束基的讨论下，收敛是没有问题的．

4.1.3 sinc 展开的例子

无限维空间正交基的另一个例子是香农(Shannon)抽样展开[Mar91]．如果$f(t)$是带限的，对于$|\omega| > W$，$f(t)$的频谱是零，那么对抽样区间$T < \frac{\pi}{W}$，有

$$f(t) = \sum_k f(Tk)\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t - \pi k\right)}{\frac{\pi}{T}t - \pi k}. \tag{4.21}$$

在这种情况下，基函数是 sinc 函数，系数是原来函数的简单抽样．这是指，sinc 基函数与一个带限函数的内积将给出这个函数的抽样．容易看到，sinc 基函数是正交的，这可由取两个 sinc 函数的内积得到，这是两个 sinc 函数之一的抽样，值等于 1 或 0.

44

4.2 框架和紧框架

当满足一个函数集是一组规范正交基的条件时，(4.2)中的表示是充分的，而当要求集是一组基时，(4.5)的表示是充分的，但它们不是必要的．为了是一组基，要求系数是唯一的．换句话说，要求集是*线性无关的*，意思是指集中没有元素能写为其他元素的线性组合．

如果函数或向量集合是线性相关的，并且仍可给出(4.5)中描述的展开，那么这个集就称为一个*框架*．因此，一个框架是一个*张成集*(spanning set)．术语框架来自内积不等式的界需要是有限界的定义[Dau92，You80]．

如果想要用信号展开中的系数很好地表示这个信号，那么这些系数应该有某些性质，它们最好借助于能量和能量界描述．对于一组正交基，这采用帕塞瓦尔定理的形式．在信号空间中，为了是一个框架，展开集$\varphi_k(t)$对于某个$0 < A$和$B < \infty$以及这个空间中的所有信号$g(t)$，必须满足

$$A\|g\|^2 \leqslant \sum_k |\langle \varphi_k, g\rangle|^2 \leqslant B\|g\|^2. \tag{4.22}$$

用$\|g\|^2$除(4.22)，表明A和B是内积规范化能量上的界，它们"框"住规范化系数能量．

如果

$$A = B, \tag{4.23}$$

那么，展开集合称为一个紧框架．这种情形给出

$$A \| g \|^2 = \sum_k |\langle \varphi_k, g \rangle|^2, \tag{4.24}$$

这是紧框架的一个推广的帕塞瓦尔定理．如果 $A=B=1$，紧框架变成了一组正交基．由此，对于一个紧框架[Dau92]，可以证明

$$g(t) = A^{-1} \sum_k \langle \varphi_k(t), g(t) \rangle \varphi_k(t), \tag{4.25}$$

这与使用一组规范正交基的展开相同，除了 A^{-1}项，这一项是展开集中多余(冗余)的一种测度．

如果展开集不是一个紧框架，那么就没有严格的帕塞瓦尔定理，并且不能精确地划分变换域中的能量．然而，当 A 与 B 越接近时，可以做到越好的一个近似划分．如果 $A=B$，那么我们有一个紧框架，并且划分可以由(4.24)精确做到．Daubechies[Dau92]证明了，在(4.22)中越紧的框架界决定着越好的分析和综合系统．换句话说，如果 A 接近 0 或者是 0 且/或 B 与 A 相比是很大的，那么在分析-综合计算中将出现数值问题．

框架是一个基集合的超完全的改型，并且紧框架是一个正交基集合的超完全的改型．如果使用的框架，既不是基也不是紧框架，那么可以得到一个对偶框架集合，使得分析和综合可以进行，这与对于一组非正交基所做的相同．如果使用一个紧框架，那么数学上很类似于使用一组正交基．(4.25)中的傅里叶型系统本质上与(4.2)是相同的，并且(4.24)本质上是一个帕塞瓦尔定理．[45]

使用框架和紧框架而不使用基和正交基意味着存在一些冗余量．在某些情形中，希望有冗余，以给出一个使得误差或错误较少破坏的精确表示．在另一些情形中，冗余是效率低的，所以不希望有．框架的概念起源于 Duffin 和 Schaeffer[DS52]，并且在[You80, Dau90, Dau92]中研究了．在有限维中，总可以由一个框架去掉一些向量得到一组基，但是在无限维中，这不总是可能的．

在有限维空间中，框架的一个例子是列比行多但行之间线性无关的矩阵．紧框架的一个例子是类似于具有正交行的矩阵．在无限维中，紧框架的一个例子是一种超抽样香农展开．下面检验这个例子．

4.2.1 矩阵的例子

在三维空间中 4 个展开向量 f_k 的框架的一个例子是

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_0(1) & f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_0(2) & f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

这对应于(4.7)表示的方阵的基. 相应的分析公式是

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(0) & \tilde{f}_0(1) & \tilde{f}_0(2) \\ \tilde{f}_1(0) & \tilde{f}_1(1) & \tilde{f}_1(2) \\ \tilde{f}_2(0) & \tilde{f}_2(1) & \tilde{f}_2(2) \\ \tilde{f}_3(0) & \tilde{f}_3(1) & \tilde{f}_3(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

这对应于(4.10). 我们可以用下述方法计算一个对偶框架向量集，对(4.26)暂时附以一个任意的线性无关行，得到方阵，之后使用这个矩阵的逆矩阵的前三列作为对偶框架向量. 这清楚地表明，对偶框架不唯一. Daubechies[Dau92]证明了怎样计算一个“经济的”唯一对偶框架.

紧框架系统既出现在小波无限展开中，也出现在其他的有限维和无限维系统中. 一个框架的数值例子是

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \end{bmatrix} = \frac{1}{A}\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

这个框架是一个在三维空间中具有 4 个向量的规范化紧框架，这包括(4.25)的冗余因子. 注意，行是正交的且列是规范化的，这给出

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\boldsymbol{I} \tag{4.29}$$

[46]

或

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{A}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}, \tag{4.30}$$

这是(4.25)的矩阵形式. 因子 $A = 4/3$ 是紧框架中冗余的测度，表示在一个三维空间中使用 4 个展开向量.

对于展开系数，恒等式是

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{A}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}, \tag{4.31}$$

对于数值例子，这给出

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

虽然这不是一般的恒等算子，但是它是三维子空间上的一个恒等算子，$\boldsymbol{a}$ 在这个空间中，并且它表明 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 的行和 $\boldsymbol{F}$ 的列的范数为 1.

如果(4.25)和(4.29)中的冗余测度 A 是 1，则矩阵一定是方阵并且这个系统具有一组规范正交基.

框架是非正交基的超完全的模型，而紧框架是规范正交基的超完全改型. 紧框架在小波分析中是重要的，因为在第 5 章中讨论的加于尺度函数系数上的限制不保证小波是一组基，但却是一个紧框架. 然而，实际上，它们一般是一组基.

4.2.2 作为一个紧框架例子的 sinc 展开

无限维紧框架的一个例子是超取样情形的广义香农抽样展开[Mar 91]. 如果一个函数是超抽样的，而 sinc 函数与上频谱限 W 一致，那么抽样定理变为

$$g(t)=\frac{TW}{\pi}\sum_{n}g(Tn)\frac{\sin((t-Tn)W)}{(t-Tn)W}, \tag{4.33}$$

或者使用 R 作为超抽样的量

$$RW=\frac{\pi}{T},\quad 对于\ R\geqslant 1, \tag{4.34}$$

我们有

$$g(t)=\frac{1}{R}\sum_{n}g(Tn)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{RT}(t-Tn)\right)}{\frac{\pi}{RT}(t-Tn)}, \tag{4.35}$$

其中 sinc 函数现在不再是正交的. 事实上，当它们线性相关时，它们不再是一组基，然而，它们是一个紧框架，所以它们充当一组正交基，但是现在有一个“冗余”因子 R 作为公式中的一个乘数.

47

注意，当 R 减小到 1 时，(4.35)变为(4.21)的形式，其中每个抽样发生的地方 sinc 函数是 1 或 0，而变成位移仍为 $t=Tn$ 的一个展开，然而，sinc 函数变得比较宽，使得抽样不再在零点. 如果信号是超抽样的，那么表示(4.21)或(4.35)都可以使用. 它们两个都是超抽样的，但是(4.21)允许信号的频谱增加到没有失真的限，而(4.35)不能这样做. 推广的抽样定理(4.35)有嵌入滤波的作用，这也许是一个优点或者也许不是一个优点.

框架和紧框架对于称为冗余离散小波变换(RDWT)的应用，将在后面 7.6 节中讨论并且在 10.3 节中使用. 对于某种在 7.6 节最后讨论的自适应的描述，它们也是必需的，其中根据某些给出一组最优基的准则选取在框架中展开向量的一个线性无关子集.

4.3 有约束基和无约束基

Donoho[Don93b]使用一个有力的观点给出基系统的一种展开，其中这个基系统对于一个特别的信号类是最好的，并说明了为什么小波系统对于各种范围宽广的信号类是

好的.

Donoho按如下方式定义了一组无约束基:如果我们有一个函数类$\mathcal{F}$,它具有范数且表示为$\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$,并且有一个基集合f_k,使得每个函数$g \in \mathcal{F}$具有唯一表示$g = \sum_k a_k f_k$,而等价地定义为使用范数的极限,那么我们考虑无穷展开

$$g(t) = \sum_k m_k a_k f_k(t). \tag{4.36}$$

如果对于所有$g \in \mathcal{F}$,无穷和对于所有$|m_k| \leq 1$收敛,那么这组基就称为无约束基.这很类似于一个数值级数的无条件收敛或绝对收敛[Don93b, You80, Mey90].如果对某个$g(t)$,收敛性依赖于$m_k = 1$,那么这组基就称为约束基.

一组无约束基意思是所有的子序列收敛并且所有子序列的序列收敛.它的意思是收敛不依赖于求和项的次序或系数的符号.这隐含一组很健全的基,其中系数对于所有函数类的元素快速地下落.对于小波的情形的确是这样,小波对于一个很宽的函数类的集合是无约束基.

无约束基有一个特殊的性质,使得它们在若干情况中对于信号处理接近最优.这个性质与在一组无约束基上一类函数展开系数的空间的几何有关系.这是在[Don93b]中描述的.

基或者框架的基本概念是用一个展开系数的序列表示一个连续函数.我们看到了帕塞瓦尔定理阐述函数的L^2范数与正交基和紧框架的系数的ℓ^2范数的关系(4.24).连续函数上不同的范数表征不同的函数空间.如果函数空间有一组无约束基,那么空间中函数的范数不仅可以关系到基底展开中系数的某个范数,而且系数的绝对值可以建立这种关系.所以,如果我们只注意函数的范数,那么就没有加在展开系数的符号信息或相位信息的约束,因此是无约束的. [48]

对于一类广泛的信号处理问题,从理论上讲小波是一个杰出的展开系统,知道这一点就足够了.对于在第10章讨论的信号压缩、去噪及检测,存在的一组无约束基还建立了一个信号的小波变换的高效的非线性过程. [49]

第5章　尺度函数与尺度系数、小波与小波系数

现在，我们更详细地讨论基本尺度函数和小波，看看什么时候它们存在及它们的性质是什么[DD87，Mal89b，Law90，Law91b，Law91a，LR91，Dau92]. 使用在微分方程理论中使用的同样的方法，我们用考虑 $\varphi(t)$ 是方程的一个解来检验它的性质. 由多分辨阐述而来的基本递推方程是

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \tag{5.1}$$

其中 $h(n)$ 是尺度系数，$\varphi(t)$ 是尺度函数，它们满足这个方程，这个方程有时称为*加细方程*(refinement equation)、*扩张方程*(dilation equation)或*多分辨分析方程*(multiresolution analysis equation，MRA).

为了准确地叙述这个性质，有时要注意所考虑的或允许的具体是什么函数类. 我们将提供一条详细的路线，以给出足够多的精确的细节，而没有过多地模糊主要概念和结果. 这些概念的一些在 2.1 节描述，而另一些在下节给出. 更完整的讨论可以在[VD95]、[VK95，Wic95，Koo93]的引言或关于函数分析的任一本书中找到.

5.1　工具与定义

5.1.1　信号分类

我们使用的信号分为三类. 最基本的类称为 $L^2(\mathbf{R})$,它包括所有平方积分有限的函数：

50

$f \in L^2 \Rightarrow \int |f(t)|^2 \mathrm{d}t = E < \infty$. 这个函数类是最重要的,因为它是标准的欧几里得几何的推广,并且给出了一个信号能量的一种简单表示.

下一个最基本的类是 $L^1(\mathbf{R})$,它要求函数绝对值的积分有限:$f \in L^1 \Rightarrow \int |f(t)| \mathrm{d}t = E < \infty$. 这个类也是重要的,因为我们可以交换无限求和与这些函数的积分的顺序,而不必是 L^2 的函数. 函数空间的这些函数类可以推广到具有 $\int |f(t)|^p \mathrm{d}t = M < \infty$ 的那些函数类,并称为 L^p.

比任何 L^p 空间更一般的信号类包括称为分布(或广义函数)(distribution)的函数类. 这些广义函数,不是用它们有的"值"来定义的,而是用与一个标准函数的"内积"的值定义的. 广义函数的一个例子是狄拉克 δ 函数 $\delta(t)$,这里它用如下性质来定义:$f(T) = \int f(t)\delta(t-T)\mathrm{d}t$.

另一个要注意的细节是，这些定义中使用的积分是*勒贝格积分*，这种积分比基本的黎

曼(Riemann)积分使用更广．一个勒贝格积分的值不受在它的自变量值的任一可数集(或，更一般地，一个测度为0的集合)上的函数值影响．一个函数在有理数上定义为1，在无理数上定义为0，这个函数有一个为0的勒贝格积分．由此，使用测度论和勒贝格积分导入的性质有时称为“几乎处处”成立，意思是指它们可以在一个测度为0的集合上不成立．

函数空间、分布、勒贝格测度等，这些概念多数超出了傅里叶级数和傅里叶变换早期的研究范围．有趣的是，它们在小波理论中还是重要的．与在傅里叶理论中一样，我们经常可以忽略信号空间类，并且可以像函数那样使用分布，但是有些情形这些概念是极重要的．作为阅读本书的一个指引或者参考，我们通常可以跳过信号空间名称或假定黎曼积分．然而，当出现矛盾时，它的解决或许将需要这些细节．

5.1.2 傅里叶变换

我们需要 $\varphi(t)$ 的傅里叶变换，如果它存在，则定义为

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{5.2}$$

并且 $h(n)$ 的离散-时间傅里叶变换(DTFT)[OS89]定义为

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-i\omega n}, \tag{5.3}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$，并且 n 是一个整数($n \in \mathbf{Z}$)．如果把与 $h(n)$ 的卷积看作为一个在3.1节所定义的数字滤波器，那么 $h(n)$ 的离散-时间傅里叶变换是滤波器的频率响应，[OS89，PB87]，它是 2π 周期的．

如果 $\Phi(\omega)$ 存在，定义的递推式(5.1)变成

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega/2) \Phi(\omega/2), \tag{5.4}$$

如果 $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$，并且 $\Phi(0)$ 有定义，上式在迭代之后变成

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \right\} \Phi(0). \tag{5.5}$$

这可能是一个分布，或者可能是依赖于 $H(\omega)$，进而依赖于 $h(n)$ 的光滑函数[VD95，Dau92]．只要 $\Phi(0)$ 有定义，这个式子就有意义．虽然(5.1)和(5.5)项对项是等价的，$\Phi(0)$ 是有定义的，并且在适当的函数空间，极限的性质可以超越其他的得到较好的一个．注意，$H(\omega)$ 的零点如何决定 $\Phi(\omega)$ 的零点． [51]

5.1.3 加细矩阵和转移矩阵

有两个特别重要矩阵的决定小波系统的性质．第一个矩阵是*加细矩阵*(refinement matrix)M，它由基本递推关系式(5.1)，通过在整数点上计算 $\varphi(t)$ 的值得到[MP89，DL91，DL92，SN96，Str96a]．这类似于一个卷积矩阵，这个矩阵去掉偶数(奇数)行．在5.10节要使用的两个特殊的子矩阵是由在二进有理数上计算 $\varphi(t)$ 的值得到的，对 $N=6$

的情形，具体描述为

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & h_4 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{M}_0\underline{\varphi} = \underline{\varphi}, \tag{5.7}$$

其中 $\boldsymbol{M}_0$ 是 $h(n)$ 的 6×6 矩阵，$\underline{\varphi}$ 是 $\varphi(t)$ 的整数抽样的 6×1 向量．换句话说，值为 $\varphi(k)$ 的向量 $\underline{\varphi}$ 是对于矩阵 $\boldsymbol{M}_0$ 的单位特征值的特征向量．

第二个子矩阵是一个平移模型，具体描述为

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1/2} \\ \varphi_{3/2} \\ \varphi_{5/2} \\ \varphi_{7/2} \\ \varphi_{9/2} \\ \varphi_{11/2} \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

其中矩阵记为 $\boldsymbol{M}_1$. 一般的加细矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是一个无限矩阵，$\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{M}_1$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的一部分．如果矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是 $h(n)$ 的卷积矩阵，那么我们可以用表示下抽样卷积矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的 $[\downarrow 2]\boldsymbol{H}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$. 显然，对于在二进有理数上定义的 $\varphi(t)$，$\boldsymbol{M}_0$ 一定有一个单位特征值．

第三个矩阵(不明显但或许更重要)称为*转移矩阵*(transition matrix) $\boldsymbol{T}$，并且它是由 $h(n)$ 的自相关矩阵建立的．转移矩阵构造为

$$\boldsymbol{T} = [\downarrow 2]\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}. \tag{5.9}$$

Lawton[Law91a]使用这个矩阵(有时称为 Lawton 矩阵，原来称为小波 Galerkin 矩阵)获得正交小波基的必要和充分条件．像我们将在本章后面看到的那样，它的特征值在决定 $\varphi(t)$ 和相应的小波系统的性质方面也是重要的．

52

5.2 必要条件

定理1 如果 $\varphi(t)\in L^1$ 是基本递推方程(5.1)的解，并且如果 $\int\varphi(t)\,\mathrm{d}t\neq0$，那么

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2}. \tag{5.10}$$

定理的证明只需要交换求和与积分的次序(在 L^1 中是允许的)，而不需要基底函数的

正交性或 $\varphi(t)$ 除了非零积分外的其他的性质的假定．这个定理的证明和这里若干其他叙述包含在附录 A 中．

这个定理表明，与线性常系数微分方程不同，不只任一常数集合保证是一个解，系数必须满足线性方程(5.10)．这是关于 $h(n)$ 的最弱的条件．

定理 2 如果 $\varphi(t)$ 是基本递推方程(5.1) 的一个 L^1 解，满足 $\int\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$，并且

$$\sum_{\ell}\varphi(t-\ell) = \sum_{\ell}\varphi(\ell) = 1, \tag{5.11}$$

而对于某个 k，$\Phi(\pi+2\pi k)\neq 0$，那么

$$\sum_{n}h(2n) = \sum_{n}h(2n+1), \tag{5.12}$$

其中(5.11)也许必须是一个分布和．相反，如果满足(5.12)，那么(5.11)成立．

式(5.12)称为基本条件(fundamental condition)，它比正交性要求弱，而比(5.10)要求强．这是一个简单的结果，由在整数上计算(5.1)得到．式(5.11)称为单位划分(partitioning of unity)(或者 Strang 条件，或者 Shoenberg 条件)．

由 Cavaretta、Dahman 和 Micchelli[CDM91] 与贾荣庆[Jia95] 的一个类似定理指出，如果 $\varphi\in L^p$，并且 $\varphi(t)$ 的整数平移形成由它们张成的空间的一组里斯(Riesz) 基，那么 $\sum_{n}h(2n) = \sum_{n}h(2n+1)$．

定理 3 如果 $\varphi(t)$ 是(5.1)的一个 $L^2\cap L^1$ 的解，并且如果 $\varphi(t)$ 的整数平移是正交的，定义为

$$\int\varphi(t)\varphi(t-k)\,\mathrm{d}t = E\delta(k) = \begin{cases}E & \text{若 } k=0\\ 0 & \text{其他的}\end{cases}, \tag{5.13}$$

那么

$$\sum_{n}h(n)h(n-2k) = \delta(k) = \begin{cases}1 & \text{若 } k=0\\ 0 & \text{其他的}\end{cases}. \tag{5.14}$$

注意，这与 $\varphi(t)$ 的特殊的规范化无关．

如果 $\varphi(t)$ 用除以它的能量的平方根 $\sqrt{E}$ 规范化，那么 $\varphi(t)$ 的整数平移是规范正交的，定义为

$$\int\varphi(t)\varphi(t-k)\,\mathrm{d}t = \delta(k) = \begin{cases}1 & \text{若 } k=0\\ 0 & \text{其他的}\end{cases}. \tag{5.15}$$

这个定理表明，为使(5.1)的解在整数平移之下是正交的，必要条件是，递推方程的系数在抽取或下 2 抽样后本身是正交的．如果 $\varphi(t)$ 和/或 $h(n)$ 是复函数，必须在(5.13)、(5.14)和(5.15)中使用复共轭．

满足(5.14)的系数 $h(n)$ 称为正交镜像滤波器(quadrature mirror filter，QMF)或共轭镜像滤波器(conjugate mirror filter，CMF)，并且，显然，条件(5.14)称为正交条件(quadratic condition)．

推论 1 在定理 3 的假设下，$h(n)$的范数是 1

$$\sum_n |h(n)|^2 = 1. \tag{5.16}$$

不但$h(n)$的和必须等于$\sqrt{2}$，而且为了解的正交性，$h(n)$的平方和必须等于 1，这两个都与$\varphi(t)$的规范化无关．这个$h(n)$的单位规范化是(5.1)中的$\sqrt{2}$项的结果．

推论 2 在定理 3 的假设下，

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5.17}$$

在附录中证明了，不仅$h(n)$的和必须等于$\sqrt{2}$，而且为了解的正交性，$h(n)$中偶数项的和与奇数项的和都必须是$1/\sqrt{2}$，而与$\varphi(t)$的任何规范化无关，这个结果可由此证明导出．虽然在这里叙述的是正交性的必要条件，但是如同在定理 2 中叙述的，在较弱的非正交条件下，此结果也成立．

定理 4 如果$\varphi(t)$在$0 \leq t \leq N-1$区间上有紧支撑，并且如果$\varphi(t-k)$是线性无关的，那么$h(n)$也在$0 \leq n \leq N-1$区间上有紧支撑：

$$h(n) = 0, \text{对于 } n < 0 \text{ 和 } n > N-1, \tag{5.18}$$

因此，N是序列$h(n)$的长．

如果平移不是线性无关的(或一些等价的限制)，那么我们可以有$h(n)$具有无限的支撑，而$\varphi(t)$具有有限的支撑[Ron92]．

这些定理表明，如果$\varphi(t)$有紧支撑，并且在整数上的平移是正交的，那么除了满足一个线性方程(5.10)外也满足$\frac{N}{2}$个双线性方程或二次方程(5.14)．$h(n)$的支撑或长度是N，N必定是偶数，选取这N个系数的自由度的个数是$\frac{N}{2}-1$．这个自由度在第 6 章和别处叙述的小波系统的设计中使用．

5.3 频域必要条件

下面，我们讨论$\varphi(t)$存在的必要条件的频域模型．需注意的是，必须在特殊的函数空间中考虑，在这个空间可以进行傅里叶变换运算并且傅里叶变换仍属于这个空间．在本书中没有详述，但是读者可以参考[VD95]．

54

定理 5 如果$\varphi(t)$是基本递推方程(5.1)的一个L^1解，那么下述等价条件必定成立：

$$\sum_n h(n) = H(0) = \sqrt{2}. \tag{5.19}$$

这个结果直接由(5.3)得到，并且指出基本的存在性要求(5.10)，等价于要求有限脉冲响应滤波器的频率响应在 DC($\omega=0$)处是$\sqrt{2}$．

定理 6 对于$h(n) \in \ell^1$，那么

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) \quad 当且仅当\ H(\pi) = 0. \tag{5.20}$$

这个定理说明，具有脉冲响应 $h(n)$ 的有限脉冲响应滤波器的频率响应在 Nyquist 频率($\omega=\pi$)处是 0. 这可由(5.4)和(5.7)得到，并且保证了 $h(n)$ 是一个低通数字滤波器的事实．这还等价于具有一个单位特征值的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{T}$.

定理 7 如果 $\varphi(t)$ 是 $L^2 \cap L^1$ 中(5.1)的一个解，并且 $\Phi(\omega)$ 是(5.4)的一个解，满足 $\Phi(0) \neq 0$，那么

$$\int \varphi(t)\varphi(t-k)\,\mathrm{d}t = \delta(k) \quad 当且仅当 \sum_\ell |\Phi(\omega + 2\pi\ell)|^2 = 1. \tag{5.21}$$

这是尺度函数正交性的时域定义的一个频域等价结果[Mal89b，Mal89c，Dau92]．这允许应用规范正交条件对频域进行论证．这还给出深入了解时域正交性要求在频域恰好是什么形式．

定理 8 对于任一 $h(n) \in \ell^1$，

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \quad 当且仅当\ |H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 2. \tag{5.22}$$

这个定理[Law90，Hei93，Dau92]给出了在尺度系数上时域与频域等价条件，并且指出，正交性要求(5.14)等价于以 $h(n)$ 为系数的正交镜像滤波器(QMF)的有限脉冲响应滤波器[SB86a]. 注意(5.22)、(5.19)与(5.20)要求 $|H(\pi/2)| = 1$，并且此滤波器是一个"半带"滤波器．

5.4 充分条件

上面是 $\varphi(t)$ 存在的必要条件，而下面是充分条件．叙述的形式有多种，而我们以如下例子的方式描述，并且对于更多细节，还给出了参考文献[DD87，Mal89b，Law90，Law91b，Law91a，LR91，Dau92，LLS97b，LLS97a，Law97].

定理 9 如果 $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$，并且 $h(n)$ 有有限支撑，或者快速衰减，使得对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $\sum |h(n)|(1+|n|)^\varepsilon < \infty$，那么，唯一的(包括一个尺度倍数在内)$\varphi(t)$(或许是一个分布)存在，它满足(5.1)且它的分布的傅里叶变换满足(5.5).

这[DD87，Law90，Law]可以由在频域中考虑(5.5)的收敛性得到．近年来在时域中已经由 Lawton[Law97]使用更强有力的方法得到．

因为这个定理使用的条件可能最弱，所以结果是弱的．由只要求 $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ 得到的尺度函数也许因性质不好而不能计算或使用．最坏的情形是不支持多分辨分析，或者不能给出一个有用的展开系统．

定理 10 如果 $\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = 1/\sqrt{2}$，并且 $h(n)$ 有有限支撑或者快速衰减，使得对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $\sum |h(n)|(1+|n|)^\varepsilon < \infty$，那么满足(5.1)的 $\varphi(t)$(或许是

一个分布)存在、唯一，并且在二进有理数上有定义．此外，分布和

$$\sum_k \varphi(t-k) = 1, \tag{5.23}$$

成立．

这个条件称为基本条件[SN96，LLS97b]，给出一个比定理9稍微严格的结果．而尺度函数仍可能是不属于 L^1 或 L^2 的分布，它比定理9在二进有理数稠密集上有定义的要求性质好．这个定理等价于由乘积公式(5.5)给出 $\Phi(\omega)$ 比较好性质的要求 $H(\pi)=0$. 这还保证对于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 有一个单位特征值，但是不保证另外的特征值的模不大于1.

下面几个定理使用在(5.9)中定义的转移矩阵 $\boldsymbol{T}$，它是一个下抽样的自相关矩阵．

定理 11 如果转移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 在复平面的单位圆上或单位圆内有特征值，并且如果在单位圆上的任一特征值是多重的，它们具有特征值的一个完备集合，那么 $\varphi(t)\in L^2$.

如果 $\boldsymbol{T}$ 有模为1的特征值，那么逐次逼近算法(级联算法)(5.71)弱收敛于 $\varphi(t)\in L^2$ [Law].

定理 12 如果转移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 有一个单特征值1，而所有其他的特征值的模都小于1，那么 $\varphi(t)\in L^2$.

这里，逐次逼近算法(级联算法)(5.71)强收敛于 $\varphi(t)\in L^2$. 这在[SN96]中给出．

如果除了要求(5.10)外，我们要求二次系数条件(5.14)，那么就有给出 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 并且给出一个多分辨紧框架系统的一个比较严的结果．

56

定理 13 (Lawton) 如果 $h(n)$ 有有限支撑或快速衰减，并且如果 $\sum_n h(n)=\sqrt{2}$, $\sum_n h(n)h(n-2k)=\delta(k)$，那么 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 存在，并且生成一个小波系统，这个小波系统是 L^2 中的紧框架．

这个 Lawton[Law90,Law91b] 的重要结果，给出了 $\varphi(t)$ 存在且生成小波紧框架的充分条件．证明使用基本递推方程(5.1)的迭代，作为类似于微分方程的 Picard 方法的逐次逼近．事实上，这个方法在5.10节中用于计算 $\varphi(t)$. 注意，尺度函数可能很粗糙，甚至在性质上“分形”．如果分析的信号也是粗糙的，这或许是合乎需要的．

虽然这个定理保证 $\varphi(t)$ 生成一个紧框架，但是在大多数实际情形中，得到的系统是一组规范正交基[Law91b]. 在下述定理中，条件一般是满足的．

定理 14 (Lawton) 如果 $h(n)$ 有紧支撑，$\sum_n h(n)=\sqrt{2}$，及 $\sum_n h(n)h(n-2k)=\delta(k)$，那么 $\varphi(t-k)$ 形成一个正交集，当且仅当转移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 有一个单特征值1.

这个强有力的结果简单计算 $h(n)$，以检验 $h(n)$ 是否能支持一个小波展开系统[Law90，Law91b，Law91a]. 使用由 $h(n)$ 形成的有限脉冲响应数字滤波器的频率响应的一个等价结果由 Cohen 给出．

定理 15 (Cohen) 如果 $H(\omega)$ 是 $h(n)$ 的离散时间傅里叶变换，具有紧支撑，$\sum_n h(n)=$

$\sqrt{2}$,以及 $\sum_n h(n)h(n-2k)=\delta(k)$,并且如果对于 $-\pi/3 \leqslant \omega \leqslant \pi/3$,有 $H(\omega) \neq 0$,那么满足(5.1)的 $\varphi(t-k)$ 生成 L^2 中的一组规范正交基.

这个频域充分条件的一个稍微比较弱的模型是比较容易证明的[Mal89b, Mal89c],并且对于在 $-\pi/2 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$ 中不允许有零点的情况,可以推广到 M 带情形[Dau92]. 其他的充分条件和定理 13 中的那些条件一起保证有一组正交基. Daubechies 的消失矩保证有一组规范正交基.

定理 5、定理 6 和定理 15 表明,$h(n)$ 具有低通有限脉冲响应数字滤波器的特征. 后面将看到,由小波系数组成的有限脉冲响应滤波器是高通滤波器,滤波器组在第 3 章中叙述并且在 7.2 节中进一步讨论.

定理 16 如果 $h(n)$ 具有有限支撑,并且如果 $\varphi(t) \in L^1$,那么 $\varphi(t)$ 有有限支撑[Law].

如果不限制 $\varphi(t)$ 是 L^1 的,$h(n)$ 有有限支撑,那么 $\varphi(t)$ 可能有无限支撑.

这些定理给出了递推方程系数 $h(n)$ 与作为(5.1)的解的尺度函数 $\varphi(t)$ 之间关系的一个好的描述. 更多的性质和特征在 5.8 节中描述.

小波系统设计

本章给出相当多理论上的结果的主要目的之一是建立设计小波系统的条件. 一种途径是用最少的充分条件作为优化或逼近的约束,然后使用剩余的自由度选取 $h(n)$,以给出最佳信号表示、分解或者压缩. 在一些情形中,充分条件超过了约束,需要使用必要条件,之后检查设计,看它是否是满足的. 在许多情形中,小波系统是使用具有小波基本约束的数字滤波器设计技巧由 $H(\omega)$ 的频域设计而设计的. 57

5.5 小　　波

虽然本章主要是关于尺度函数的,但是也包含一些基本的小波性质.

定理 17 如果尺度系数 $h(n)$ 满足尺度函数的存在性和正交性条件,并且小波由(2.24)定义,那么这个小波的整数平移张成空间 $\mathcal{W}_0$,正交于 $\mathcal{V}_0$,两个空间都属于 $\mathcal{V}_1$,即小波与同样尺度的尺度函数是正交的,

$$\int \varphi(t-n)\psi(t-m)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{5.24}$$

当且仅当系数 $h_1(n)$ 由

$$h_1(n) = \pm(-1)^n h(N-n), \tag{5.25}$$

给出,其中 N 是一个为方便定位 $h_1(n)$ 而选取的任意奇数.

证明的要点在附录 A 中.

定理 18 如果尺度系数 $h(n)$ 满足尺度函数的存在性和正交性条件,并且小波由(2.24)定义,那么这个小波的整数平移张成空间 $\mathcal{W}_0$,正交于 $\mathcal{V}_0$,两个空间都属于 $\mathcal{V}_1$,即

小波与同样尺度的尺度函数是正交的．如果

$$\int \varphi(t-n)\psi(t-m)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{5.26}$$

那么

$$\sum_n h(n)h_1(n-2k) = 0. \tag{5.27}$$

这是在附录 A 中导出的(A.39).

如果 $h_0(n)$ 定义为 $h(n)$，在(5.14)和(5.27)中的平移的正交性条件和尺度函数与小波的正交性条件可以结合给出

58

$$\sum_n h_\ell(n)h_m(n-2k) = \delta(k)\delta(\ell-m), \tag{5.28}$$

定理 19 如果 $h(n)$ 满足(5.10)与(5.14)的线性与二次容许性条件，那么

$$\sum_n h_1(n) = H_1(0) = 0, \tag{5.29}$$

$$|H_1(\omega)| = |H(\omega+\pi)|, \tag{5.30}$$

$$|H(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 = 2, \tag{5.31}$$

和

$$\int \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{5.32}$$

小波通常伸缩使得它的范数是 1.

本节的结果不包括尺度函数系数 $h(n)$ 或小波系数 $h_1(n)$ 的整数平移的结果．在特殊的情况下，可以平移这些序列引起相应的有限脉冲响应滤波器．

5.6 另外的规范化

一些作者使用尺度系数的另外的规范化．在有些方面，它比这里使用的形式更清楚，但是它没有把基本递推描述为规范化展开，并且它没有给出 $h(n)$ 的单位范数．另外的规范化使用不带$\sqrt{2}$的基本多分辨递推方程

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\varphi(2t-n). \tag{5.33}$$

使用这个规范化的一些关系和结果是：

$$\sum_n h(n) = 2,$$

$$\sum_n |h(n)|^2 = 2,$$

$$\sum_n h(n)h(h-2k) = 2\delta(k),$$

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = 1,$$

$$H(0) = 2,$$
$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 4. \tag{5.34}$$

偶尔还使用一个不同的规范化，它有(5.33)中的一个因子2而不是因子$\sqrt{2}$或1，给出$\sum_n h(n) = 1$. 在本书的其他地方，此结果的另外的明显的修改可以做出. 使用文献中的尺度系数$h(n)$时要注意，有时必须乘或除以$\sqrt{2}$才能与本书考虑的一致.

5.7 尺度函数和小波的例子

许多现代小波在20世纪80年代以前还没有看到过或描述过. 本节讨论一些最普通的小波系统.

59

5.7.1 哈尔小波

具有我们所需的性质最多、最古老和最基本的小波系统是由哈尔基函数构造的. 如果选取一个长$N=2$的尺度系数集，那么在满足(5.10)与(5.14)的必要条件之后，没有剩余的自由度. 唯一的(包括规范化在内)系数是

$$h(n) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \tag{5.35}$$

并且得到的规范化尺度函数是

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{对于 } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.36}$$

所以，小波是

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{对于 } 0 < t < 1/2 \\ -1 & \text{对于 } 1/2 < t < 1 \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.37}$$

它们满足的多分辨方程(2.13)如图2-2所示. 哈尔证明了这些函数的平移和伸缩形成$L^2(\mathbf{R})$的一组规范正交基. 容易看到，哈尔函数还是满足Daubechies条件的紧支撑规范正交小波系统. 虽然它们可以达到与$N=2$时相同的正则性，但仍是不连续的. 正交性和张成的子空间的嵌套是容易看到的，因为平移在时域上没有重叠部分. 对这些函数应用5.5节和5.8节的各种性质，并且看一下性质是怎样得到满足的，这是很有意义的. 它们如图2-11到2-15的例子所示.

5.7.2 sinc 小波

下一个著名的基底集合是由sinc函数形成的. sinc函数一般在香农抽样定理的叙述中给出，但是我们可以看到，sinc函数的平移为基函数的规范正交集(或者，在某些情形，是一个紧框架). 同样，它们一般形成满足多分辨系统的不同要求条件的一个规范正交小波系统.

sinc 函数定义为

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \tag{5.38}$$

其中 $\text{sinc}(0)=1$. 这是一个很有用且有效的函数，因为它的傅里叶变换是一个简单的矩形函数，并且矩形函数的傅里叶变换是 sinc 函数. 为了是尺度函数，sinc 函数对于适当的尺度系数 $h(n)$ 和某个 K，必须满足(2.13)如

$$\text{sinc}(Kt) = \sum_n h(n)\,\text{sinc}(K2t - Kn). \tag{5.39}$$

如果由如同(4.35)给出的一般化的抽样函数构造尺度函数，sinc 函数变成

60

$$\text{sinc}(Kt) = \sum_n \text{sinc}(KTn)\,\text{sinc}\left(\frac{\pi}{RT}t - \frac{\pi}{R}n\right). \tag{5.40}$$

为使这两个式子成立，抽样周期必须是 $T=1/2$，并且参数

$$K = \frac{\pi}{R}, \tag{5.41}$$

这给出尺度系数为

$$h(n) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2R}n\right). \tag{5.42}$$

我们看到 $\varphi(t)=\text{sinc}(Kt)$ 是一个有无限支撑的尺度函数，并且它的相应的尺度系数是一个 sinc 函数的抽样. 如果 $R=1$，那么 $K=\pi$，并且尺度函数生成一个正交小波系统. 对于 $R>1$，小波系统是一个紧框架，展开集不是正交的或不是一组基，并且如同在第 5 章中讨论的，R 是系统中的冗余量.

对于正交的 sinc 尺度函数，小波简单地表示为

$$\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t). \tag{5.43}$$

sinc 尺度函数和小波不具有紧支撑，但是它们描述一个由无限长的 $h(n)$ 得到的无限可微的函数集. 正交的 sinc 基的正交性和多分辨特性在频域中似乎是最好的，其中在那里频谱没有重叠. 事实上，哈尔和 sinc 系统是彼此傅里叶对偶的. sinc 生成的尺度函数和小波如图 5-1 所示.

5.7.3 样条与 Battle-Lemarié 小波系统

如图 2-2 所示的三角尺度函数是更一般的样条尺度函数族的一种特殊情形. 尺度系数组 $h(n)=\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right\}$ 引起分段线性的、连续的三角尺度函数. 这个函数是一次样条函数，是在连接处或“节点”处连续的两个一次多项式的连接. 二次样条是由 $h=\{1/4, 3/4, 3/4, 1/4\}/\sqrt{2}$ 生成的，是三段二次多项式在连接处给出连续的一阶导数的连接. 三次样条是由 $h(n)=\{1/16, 1/4, 3/8, 1/4, 1/16\}/\sqrt{2}$ 生成的. 这样，可以生成任意的 N 次样条，具有连续的 $(N-1)$ 阶导数且具有 $N+1$ 的紧支撑. 这些函数具有好的数学性质，但是它们整数平移不是正交的. 如果进行正交化，它们的支撑变成是无限的(但是快速地衰

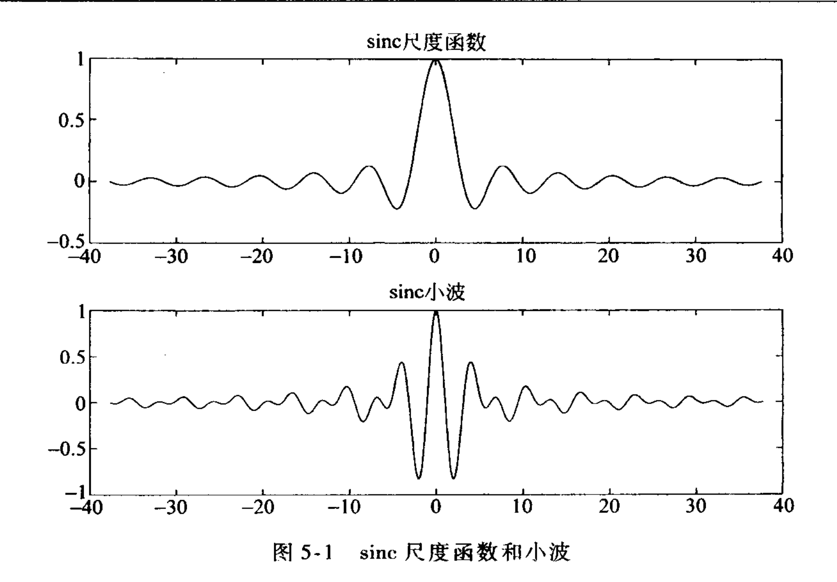


图 5-1 sinc 尺度函数和小波

减)，并且它们生成"Battle-Lemarié 小波系统"[Dau92, SN96, Chu92a, Chu92b]. 图 5-2 给出了一次、二次、三次以及四次样条尺度函数.

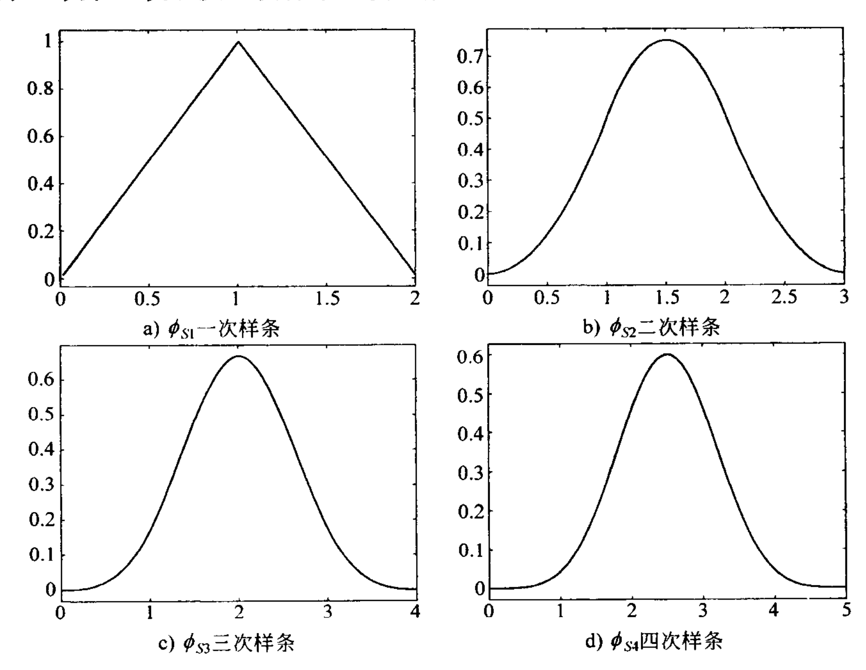


图 5-2 样条尺度函数

5.8 尺度函数与小波的进一步性质

61 ~ 62

尺度函数与小波具有一些值得注意的性质，为了了解小波分析和得到这些系统的直觉知识，应该检验这些性质．同样，尺度系数和小波系数具有所考虑的重要性质．

现在我们进一步看一看，借助于基本的定义方程和限制的尺度函数与小波的性质．我们还考虑了尺度函数和小波与方程系数的关系．这里讨论的是重数为2的情形，但是更一般的重数 M 的情形容易由这些导出(见7.2节和附录B)．某些性质的推导或证明包含在附录B中．

尺度函数的基本递推方程在(5.1)中定义为

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \tag{5.44}$$

它是齐次的，所以它的解在一个规范化因子的范围之内是唯一的．大多数情形，尺度函数与小波都规范化到单位能量或单位范数．在这里所讨论的性质中，我们规范化能量为 $E = \int|\varphi(t)|^2 dt = 1$. 如果需要，可以使用其他的规范化．

5.8.1 不要求正交性的一般性质

有许多性质是多分辨方程(5.44)的结果，所以这些性质对于正交和双正交系统成立．

性质1 $\varphi(t)$的规范化是任意的，并且在(5.13)中作为 E 给出．这里通常置 $E=1$，使得基函数是规范正交的，并且系数可以用内积容易计算．

$$\int|\varphi(t)|^2 dt = E = 1. \tag{5.45}$$

性质2 不仅尺度函数可以写为在下一个比较高的尺度空间中的函数的加权和，这个空间由基本的递推方程(5.44)给出，而且它还可以在比较高的分辨率空间表示为：

$$\varphi(t) = \sum_n h^{(j)}(n)2^{j/2}\varphi(2^j t-n), \tag{5.46}$$

其中 $h^{(1)}(n)=h(n)$，并且对于 $j\geqslant 1$

$$h^{(j+1)}(n) = \sum_k h^{(j)}(k)h^{(j)}(n-2k). \tag{5.47}$$

性质3 $\varphi(t)$的二进抽样和的公式：

$$\sum_k \varphi\left(\frac{k}{2^J}\right) = 2^J. \tag{5.48}$$

性质4 对于 $J=0$，由(5.48)得到如下的“单位划分”：

$$\sum_m \varphi(m) = 1. \tag{5.49}$$

性质5 如果 $\varphi(t)$是连续的，那么广义单位划分存在：

$$\sum_m \varphi(t-m) = 1. \tag{5.50}$$

63

性质 6 基本递推方程(5.44)的频域陈述：

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(\omega/2)\Phi(\omega/2). \tag{5.51}$$

性质 7 频域中的逐次逼近通常比(5.44)中的时域模型容易分析．这个无穷乘积的收敛性质是很重要的．

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)\right\}\Phi(0). \tag{5.52}$$

这个公式在(5.74)中导出．

5.8.2 依赖正交性的性质

下述性质依赖于尺度函数和小波函数的正交性．

性质 8 $\varphi(t)$的积分的平方等于$\varphi(t)$的平方的积分，或者$A_0^2 = E$.

$$\left[\int\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 = \int\varphi(t)^2\,\mathrm{d}t. \tag{5.53}$$

性质 9 小波的积分必定是 0

$$\int\psi(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{5.54}$$

小波的范数通常规范化为 1,使得$\int|\psi(t)|^2\mathrm{d}t = 1$.

性质 10 不仅小波的整数平移是正交的，不同的尺度也是正交的，

$$\int 2^{j/2}\psi(2^jt - k)2^{i/2}\psi(2^it - \ell)\,\mathrm{d}t = \delta(k - \ell)\delta(j - i), \tag{5.55}$$

其中$\psi(t)$的范数是 1.

性质 11 尺度函数和小波在尺度与平移上都是正交的，

$$\int 2^{j/2}\psi(2^jt - k)2^{i/2}\varphi(2^it - \ell)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{5.56}$$

对于所有整数i, j, k, ℓ成立，其中$j \leqslant i$.

性质 12 (5.13)中要求的正交性的一个频域陈述，也是在时域与频域中帕塞瓦尔定理的等价的能量测度的陈述，这对正交基集合成立．

$$\sum_k|\Phi(\omega + 2\pi k)|^2 = \int|\Phi(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \int|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t = 1. \tag{5.57}$$

64

性质 13 尺度系数可以由正交尺度函数或紧框架尺度函数用下式计算：

$$h(n) = \sqrt{2}\int\varphi(t)\varphi(2t - n)\,\mathrm{d}t. \tag{5.58}$$

性质 14 小波系数可以由正交尺度函数或紧框架尺度函数用下式计算：

$$h_1(n) = \sqrt{2}\int\psi(t)\varphi(2t - n)\,\mathrm{d}t. \tag{5.59}$$

这些性质的部分推导可以在附录 B 中找到．式(5.1)、(5.10)、(5.14)、(5.53)、

(5.51)、(5.52)和(5.57)的性质与 $\varphi(t)$ 的任何规范化是无关的．规范化影响其他的．式(5.1)、(5.10)、(5.48)、(5.49)、(5.51)、(5.52)和(5.57)的性质不要求 $\varphi(t)$ 的整数平移的正交性．式(5.14)、(5.16)、(5.17)、(5.22)、(5.20)、(5.53)和(5.58)的性质要求正交性．没有性质要求紧支撑．许多推导要求和或者和与积分交换顺序．这些交换顺序的条件必须满足．

5.9 尺度系数的参数化

$\varphi(t)$ 和 $h(n)$ 具有紧支撑的情形是很重要的．它铺助离散小波变换的时间局部化的性质，并且通常减少计算离散小波变换的计算要求．如果 $h(n)$ 具有紧支撑，那么在第 3 章中描述的滤波器是简单的有限脉冲响应滤波器．我们已经得到，序列 $h(n)$ 的长度 N 必定是偶数，并且 $h(n)$ 必须满足(5.10)的线性约束和(5.14)的 $\frac{N}{2}$ 个双线性约束．这剩下选取 $h(n)$ 的 $\frac{N}{2}-1$ 个自由度，这仍然保证 $\varphi(t)$ 的存在，并且本质上正交基函数的一个集合由 $\varphi(t)$ 生成．

5.9.1 长度为 2 的尺度系数向量

对于一个长度为 2 的 $h(n)$，在满足(5.10)和(5.14)中要求的条件后，没有剩余的自由度．这些要求是

$$h(0)+h(1)=\sqrt{2}, \tag{5.60}$$

和

$$h^2(0)+h^2(1)=1, \tag{5.61}$$

唯一满足这个条件的是

$$h_{D2}=\{h(0),h(1)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{5.62}$$

这些是哈尔尺度函数系数，它们也是在第 2 章中作为例子使用的长度 2 的并且在本章后面讨论的 Daubechies 系数[Dau92]．

65

5.9.2 长度为 4 的尺度系数向量

对于长度为 4 的系数序列，有一个自由度或参数，它给出满足下述要求条件的所有系数：

$$h(0)+h(1)+h(2)+h(3)=\sqrt{2}, \tag{5.63}$$

$$h^2(0)+h^2(1)+h^2(2)+h^2(3)=1, \tag{5.64}$$

和

$$h(0)h(2)+h(1)h(3)=0. \tag{5.65}$$

令参数是角度 α，系数变成

$$h(0)=(1-\cos(\alpha)+\sin(\alpha))/(2\sqrt{2}),$$

$$h(1) = (1 + \cos(\alpha) + \sin(\alpha))/(2\sqrt{2}),$$
$$h(2) = (1 + \cos(\alpha) - \sin(\alpha))/(2\sqrt{2}),$$
$$h(3) = (1 - \cos(\alpha) - \sin(\alpha))/(2\sqrt{2}). \quad (5.66)$$

对于 $\alpha=0$，$\pi/2$，$3\pi/2$，这些公式还给出长度 2 的哈尔系数(5.62)，以及对于 $\alpha=\pi$ 的一个退化的条件．对于 $\alpha=\pi/3$，我们得到(在本书后边讨论的) Daubechies 系数．这些 Daubechies-4 系数具有特别清楚的形式：

$$h_{D4} = \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right\}. \quad (5.67)$$

5.9.3 长度为 6 的尺度系数向量

对于长度为 6 的系数序列 $h(n)$，两个参数定义为 α 和 β，并且得到的系数是

$$\begin{aligned}
h(0) &= [(1 + \cos(\alpha) + \sin(\alpha))(1 - \cos(\beta) - \sin(\beta)) + 2\sin(\beta)\cos(\alpha)]/(4\sqrt{2}),\\
h(1) &= [(1 - \cos(\alpha) + \sin(\alpha))(1 + \cos(\beta) - \sin(\beta)) - 2\sin(\beta)\cos(\alpha)]/(4\sqrt{2}),\\
h(2) &= [1 + \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta)]/(2\sqrt{2}),\\
h(3) &= [1 + \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)]/(2\sqrt{2}),\\
h(4) &= 1/\sqrt{2} - h(0) - h(2),\\
h(5) &= 1/\sqrt{2} - h(1) - h(3).
\end{aligned} \quad (5.68)$$

这里，对于任一 $\alpha=\beta$ 生成哈尔系数，并且，如果 $\beta=0$ 而 α 是一个自由参数，那么得到长度为 4 的系数(5.66)．长度为 4 的 Daubechies 系数对于 $\alpha=\pi/3$ 和 $\beta=0$ 可计算．长度为 6 的 Daubechies 系数由 $\alpha=1.35980373244182$ 和 $\beta=-0.78210638474440$ 得到．

这些公式的逆，它由允许的 $h(n)$ 给出的 α 和 β 是

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2(h(0)^2 + h(1)^2) - 1 + (h(2) + h(3))/\sqrt{2}}{2(h(1)h(2) - h(0)h(3) + \sqrt{2}(h(0) - h(1))}\right), \quad (5.69)$$

$$\beta = \alpha - \arctan\left(\frac{h(2) - h(3)}{h(2) + h(3) - 1/\sqrt{2}}\right). \quad (5.70)$$

66

当 α 和 β 的范围由 $-\pi$ 到 π 时，生成所有可能的 $h(n)$．这允许通过实验，看看这些紧支撑小波看起来像什么．在附录 C 的 MATLAB 程序中，执行了这个参数化，并且这个也在 Aware、Inc. software、UltraWave[The89]中给出．

因为尺度函数与小波使用整数平移，所以它们的支撑的位置是不重要的，重要的只是支撑的大小．一些作者平移 $h(n)$、$h_1(n)$、$\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 到大约围绕原点定中心．这可由具有初始非零的尺度系数从 $n=-\frac{N}{2}+1$ 而不是 0 出发达到．我们选择原点在 $n=t=0$.

对于 $N=2$，4，6，计算 $h(n)$ 的 MATLAB 程序在附录 C 中给出．它们根据(5.62)、

(5.66)和(5.68)由 α 和 β 计算 $h(n)$. 它们还反过来使用(5.70)由可允许的 $h(n)$ 计算 α 和 β. 对于任一长度使用在[Dau92]和本书第6章中的谱因子化(spectral factorization)技巧计算 Daubechies 系数的一个程序也包括在内.

参数化比较长的序列 $h(n)$ 是比较困难的，但是用 Pollen[Polar]和 Wells[Wel93]的技巧或者在第8章中叙述的 Vaidyanathan[Vai92]的因子化是可以做到的. Selesnick 对于 $N=8$ 使用符号软件系统 Maple 推导出了精确的公式，并且对于比较长的序列建立了公式[Sel97]. 这超越了这些独立参数的空间，使得我们可以对于一种特殊的问题或一类信号求得最优的小波[Dau92, GOB94].

5.10 计算基本的尺度函数和小波

虽然在大多数实际应用中，我们还没有直接使用尺度函数和小波(我们使用尺度系数和小波系数)，但是它启发我们考虑计算 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的方法. 我们将讨论两种方法. 第一种方法是逐次逼近的形式，它在理论上用于证明 $\varphi(t)$ 的存在性和唯一性，并且还能用于精确的计算它们. 这可以在时域中求 $\varphi(t)$，或在频域中求表示为 $\Phi(\omega)$ 的 $\varphi(t)$ 的傅里叶变换. 第二种方法是在整数上通过解联立方程组来解 $\varphi(t)$ 的精确值. 由这些值，然后就能精确地计算在半整数上的值，然后是1/4整数上的值，依此类推，就给出 $\varphi(t)$ 在二进有理数上的值.

5.10.1 逐次逼近或级联算法

为了解基本递推方程(5.1)，我们提出一种迭代算法，这种迭代算法产生对 $\varphi(t)$ 的逐次逼近. 如果算法收敛到一个定点，那么这个定点就是(5.1)的解. 对于第 k 次迭代，迭代定义为

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sqrt{2}\varphi^{(k)}(2t-n), \tag{5.71}$$

其中必须给定初值 $\varphi^{(0)}(t)$. 因为这可以看作是在前边应用的输出上使用同样的运算，这有时称为级联算法(cascade algorithm).

67

使用定义(5.2)和(5.3)，频域形式变成

$$\Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi^{(k)}\left(\frac{\omega}{2}\right), \tag{5.72}$$

并且极限可以写为无穷乘积形式

$$\Phi^{(\infty)}(\omega) = \left[\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)\right]\right]\Phi^{(\infty)}(0). \tag{5.73}$$

如果这个极限存在，尺度函数的傅里叶变换是

$$\Phi(\omega) = \left[\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)\right]\right]\Phi(0). \tag{5.74}$$

极限不依赖于初始的 $\varphi^{(0)}(t)$ 的形状，而只依赖于 $\Phi^{(k)}(0) = \int\varphi^{(k)}(t)\mathrm{d}t = A_0$，它在迭代中是不变的．如果 $\Phi(\omega)$ 的极限有定义，如当它在 $\omega = 0$ 是连续的，那么这就是有意义的．

在附录 C 中的 MATLAB 程序实现(5.71) 中的算法，它可靠地收敛于 $\varphi(t)$，甚至当它很不连续时．由这个尺度函数，小波可以由(2.24) 产生．有趣的是，分为满足(5.10) 与(5.14) 的容许的 $h(n)$，和不容许的 $h(n)$ 两方面试试这个算法，画出每次迭代的函数．对于 $N = 4$，每次迭代的尺度函数如图 5-3 所示．

因为这个算法的迭代形式，一次一次使用同样的过程，所以它有时称为**级联算法** [SN96, Str96a].

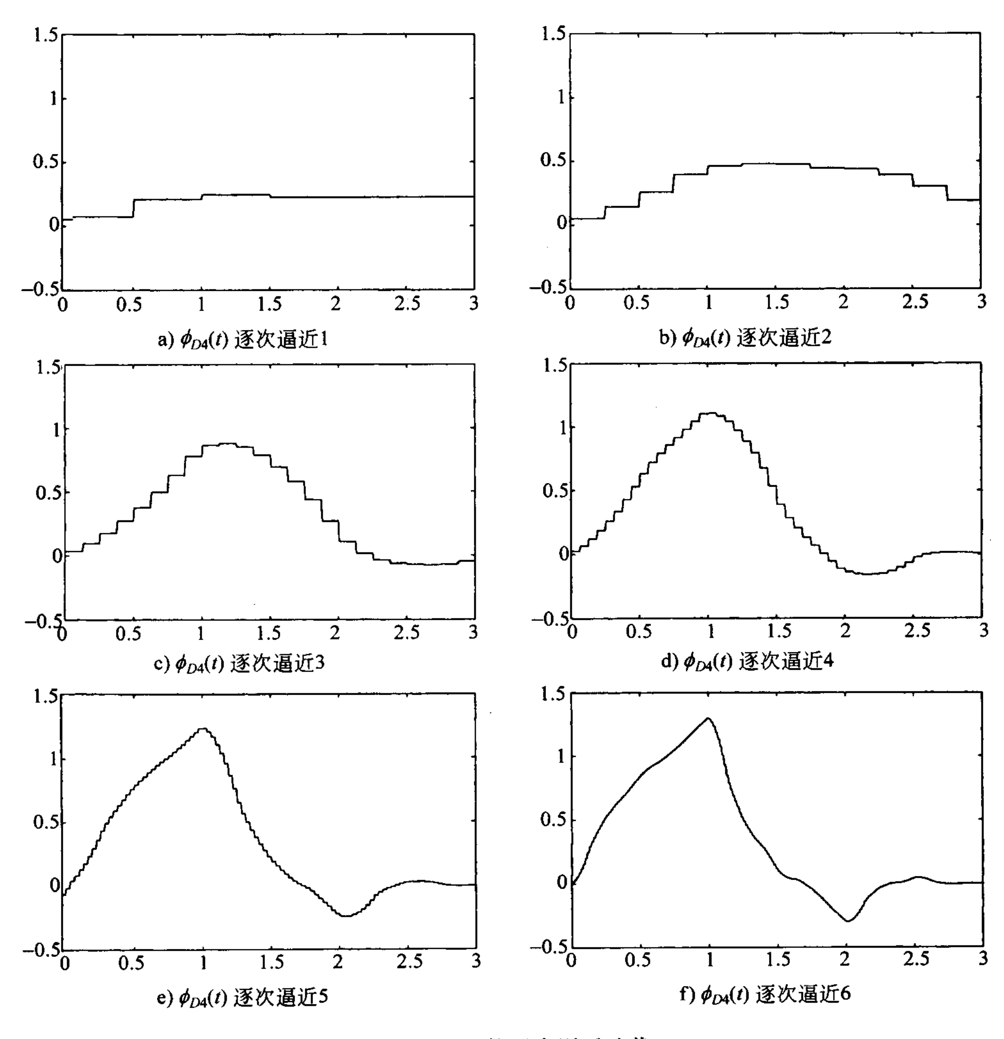
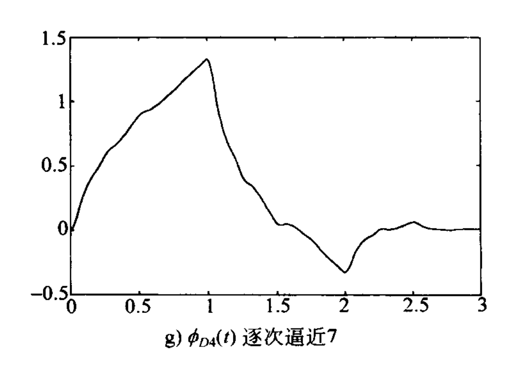
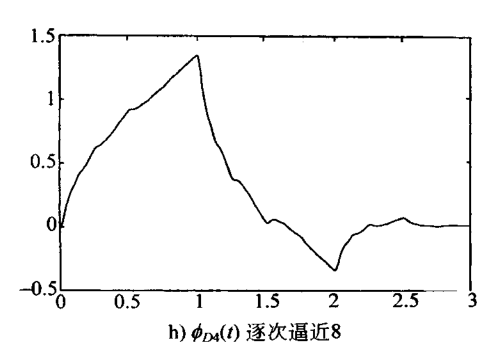


图 5-3 φ_{D4} 的逐次逼近迭代



g) $\phi_{D4}(t)$ 逐次逼近7



h) $\phi_{D4}(t)$ 逐次逼近8

图 5-3 （续）

5.10.2 迭代滤波器组

计算尺度函数的方法还是使用迭代过程，它由第3章的滤波器结构的级组成，它在一个尺度上由另一个上的那些计算小波展开系数(离散小波变换的值). 尺度函数、尺度函数的小波展开本身在 $j=1$ 的尺度上是一个非零系数. 通过这个系数，经过图3-7和方程(3.20)的综合滤波器结构就得到在一个细的尺度上输出的结果，对于大的 j 本质上就是尺度函数的抽样.

5.10.3 频域中的逐次逼近

(5.2)中定义的尺度函数的傅里叶变换是研究和讨论小波理论的一个重要的工具. 它可以通过取 $\varphi(t)$ 的抽样的离散傅里叶变换来近似地计算，但是一种更直接的方法是使用(5.74)中的无穷乘积计算. 由这个公式，我们可以看到 $H(\omega)$ 的零点怎样决定 $\Phi(\omega)$ 的零点. 定理5中的存在性条件要求 $H(\pi)=0$，或更一般地，对于 $\omega=(2k+1)\pi$，$H(\omega)=0$. 式(5.74)给出了 $H(\omega)$ 零点与 $\Phi(\omega)$ 零点的关系. 对于指标 $k=1$，在 $\omega=2(2k+1)\pi$，$H(\omega/2)=0$. 对于 $k=2$，在 $\omega=4(2k+1)\pi$，$H(\omega/4)=0$，在 $\omega=8(2k+1)\pi$，$H(\omega/8)=0$ 等.

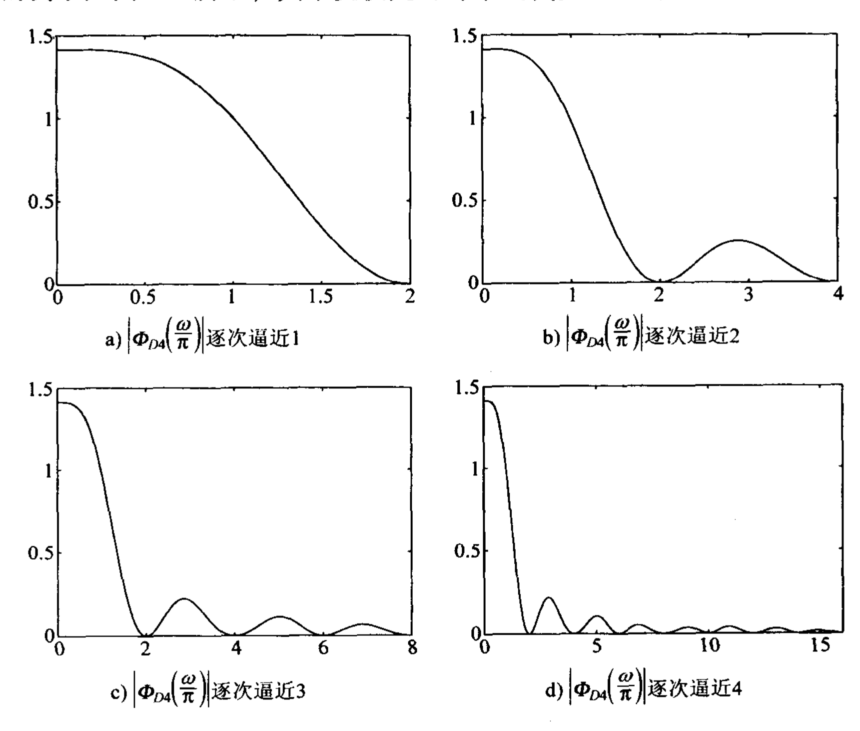
因为(5.74)是 $H(\omega)$ 的伸展模型的乘积，$H(\omega/2^j)$ 的这些零点是 $\varphi(t)$ 的傅里叶变换的零点. 回忆定理15，$H(\omega)$ 在 $-\pi/3<\omega<\pi/3$ 区间上没有零点. 所有这些给出了 $\Phi(\omega)$ 形状的一个图形和它的零点的位置. 由当 $\omega\to\infty$ 时，$\Phi(\omega)$ 的渐近分析，我们可研究 $\varphi(t)$ 的光滑性.

68～69

使用由(5.74)给出的频域逐次逼近方法计算 $\Phi(\omega)$ 的 MATLAB 程序在附录C中给出. 研究这个程序，进一步深入了解 $\Phi(\omega)$ 结构. (5.74)中的计算不一定要从 $j=1$ 出发，它们可以从最大的 $j=J$ 出发并且往回计算. 如果使用快速傅里叶变换计算一个长度 N 的离散傅里叶变换而与 $j=J$ 一致，那么 $H(\omega/2^j)$ 对 $j=J-1$ 的抽样仅仅是对于 $j=J$ 情况的每隔一个的抽样. 对于 $j=J-2$ 的下一步作法是类似的，并且如果原来的长 N 选取为2的幂，那么连续降到 $j=1$ 的过程没有任何更多的离散傅里叶变换的计算. 这给出一个很有效的算

法．细节在程序本身中．

这种算法是如此有效，使用它及一个逆快速傅里叶变换可能是计算 $\varphi(t)$ 本身的好方法．算法的例子如图 5-4 所示，其中变换是对每个迭代步画出的．



a) $\left|\Phi_{D4}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right|$逐次逼近1　　b) $\left|\Phi_{D4}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right|$逐次逼近2

c) $\left|\Phi_{D4}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right|$逐次逼近3　　d) $\left|\Phi_{D4}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right|$逐次逼近4

图 5-4　$\Phi(\omega)$ 的逐次逼近迭代

5.10.4　尺度函数的二进展开

计算尺度函数的下一种方法使用完全不同的途径．它从计算在 t 的整数点上的尺度函数的值出发，这是可以精确做到的(在我们能力范围内解联立线性方程组)．对于整数值 $t=k$，考虑基本递推方程(5.1)

$$\varphi(k) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2k-n), \tag{5.75}$$

并且对于 $0 \leqslant n \leqslant N-1$，假定 $h(n) \neq 0$.

70

这是(5.6)中描述的 $N=6$ 的加细矩阵，写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{M}_0 \underline{\varphi} = \underline{\varphi} \tag{5.76}$$

换句话说，$\varphi(k)$ 的向量是 $\boldsymbol{M}_0$ 对于单位特征值的特征向量．(5.10) 中的和 $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ 不保证 $\boldsymbol{M}_0$ 总有这样一个特征值，但是(5.12) 中的 $\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$ 保证具有一个单位特征值．这是指，如果(5.12) 不满足，那么 $\varphi(t)$ 在二进的有理数上没有定义，所以或许不

是一个很好的信号．

现在，我们的问题是求特征向量．由(5.6)注意到 $\varphi(0)=\varphi(N-1)=0$ 或者 $h(0)=h(N-1)=1/\sqrt{2}$. 对于哈尔小波系统，第二个式子成立，但是对于较长的系统，这是指因为(5.10)，所有其他的 $h(n)$ 必须是零，并且这不仅是无意义的，而且它产生一个有很粗劣性质的 $\varphi(t)$. 所以，具有 $N>2$ 和紧支撑的尺度函数在支撑的外部总是0. 这是指，我们能找到比较小的4乘4矩阵的特征向量，这个矩阵由删去 $\boldsymbol{M}_0$ 的第一行与第一列和最后一行与最后一列得到．

由(5.76)，我们得到 $[\boldsymbol{M}_0-\boldsymbol{I}]\underline{\varphi}=0$，这表示 $[\boldsymbol{M}_0-\boldsymbol{I}]$ 是奇异矩阵，即它的行不是线性无关的．我们除去最后一行，并且假定现在剩下的行是线性无关的．如果这不成立，那么我们除去另一行．接下来用由1组成的行代替原来的一行，以便实现规范化方程

$$\sum_k \varphi(k) = 1. \tag{5.77}$$

这个增广矩阵 $[\boldsymbol{M}_0-\boldsymbol{I}]$ 一行用1的一行代替，当用 $\underline{\varphi}$ 乘时给出一个向量，这个向量除了在代替行的地方是1，其他地方全为零．这个方程不是奇异的并且对于 $\underline{\varphi}$ 是可解的，解给出尺度函数在整数点上的值 $\varphi(k)$.

由 $\varphi(t)$ 在整数上的这些值，我们可以使用递推方程(5.1)或修改的形式

$$\varphi(k/2) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(k-n), \tag{5.78}$$

求在半整数上的值．

这在矩阵方程(5.8)中描述为

$$\boldsymbol{M}_1\underline{\varphi} = \underline{\varphi_2} \tag{5.79}$$

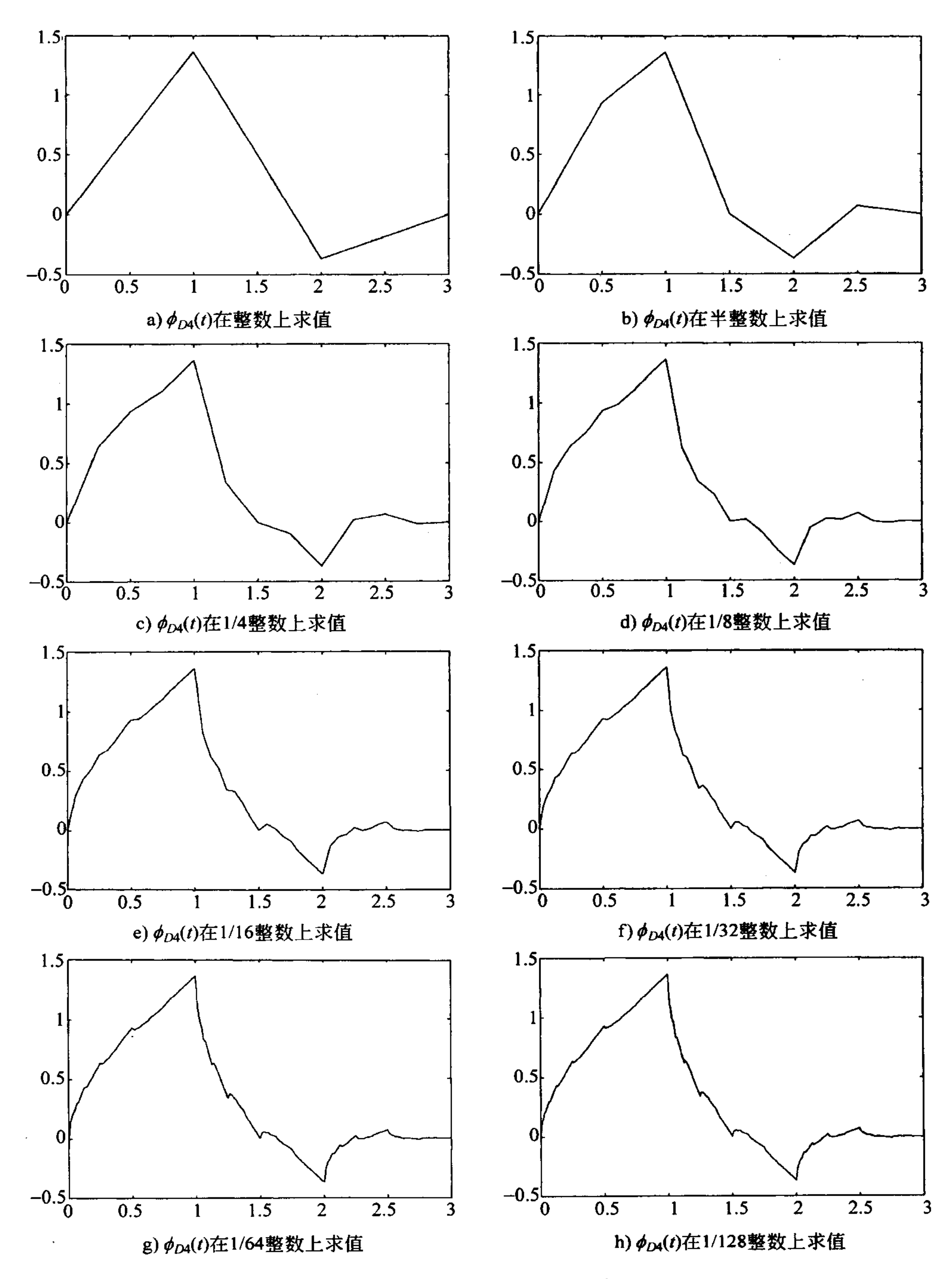
这里，第一列与最后一列和最后一行不是必需的(因为 $\varphi_0=\varphi_5=\varphi_{11/2}=0$)，并且可以为节省一些算术运算而消去．

这里描述的过程可以重复求一个矩阵，当用一个计算在奇数点用 k 除的尺度函数的向量乘时，给出尺度函数在奇数点上用 $2k$ 除的值．这个修改的矩阵相应于 $\varphi(t)$ 的抽样与 $h(n)$ 的上抽样的卷积．再次，与上抽样和下抽样结合的卷积是小波计算的基础，也是数字滤波器组的理论的基础．图5-5展示了 $N=4$ 的一个Daubechies尺度函数在这种方法的每次迭代的二进展开(dyadic expansion)计算．

71

这个二进展开不但给出一种在二进有理数($t=k/2^j$)上求 $\varphi(t)$ 的精确值的明确的方法，而且它表明了关于 $\varphi(t)$ 的 $\boldsymbol{M}$ 的特征值是怎样的．显然，如果 $\varphi(t)$ 是连续的，那么它给出了一切点的值．

MATLAB程序包括在附录C中以实现由尺度系数计算尺度函数的逐次逼近和二进展开方法．它们用于产生本节中的图．用不同的 $h(n)$ 实验并且观察对 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 的影响，这是很有启发的．



a) $\phi_{D4}(t)$在整数上求值

b) $\phi_{D4}(t)$在半整数上求值

c) $\phi_{D4}(t)$在1/4整数上求值

d) $\phi_{D4}(t)$在1/8整数上求值

e) $\phi_{D4}(t)$在1/16整数上求值

f) $\phi_{D4}(t)$在1/32整数上求值

g) $\phi_{D4}(t)$在1/64整数上求值

h) $\phi_{D4}(t)$在1/128整数上求值

图 5-5 ϕ_{D4}二进展开的迭代

第6章　正则性、矩和小波系统设计

现在我们看看，在满足(5.10)和(5.14)之后，使用剩余的$\frac{N}{2}-1$个自由度，设计$h(n)$的N个值的一种特殊方法，(5.10)和(5.14)保证尺度函数和小波的存在性与正交性(或者是一个紧框架的特性)[Dau92，Dau90，Dau93].

尺度函数和小波的特征之一是，一旦满足(5.10)和(5.14)就保证存在一个可积的尺度函数，它可能是非正则的，甚至性质上是分形的. 这在分析粗糙的或分形的信号中可能是有利的，但是对于大多数的信号与图像处理很可能是不利的.

在本节，我们将看到$h_1(n)$和$\psi(t)$的消失矩数是与$\varphi(t)$和$\psi(t)$的光滑性或可微性有关的. 可是，光滑性很难直接确定，因为与微分方程不同，定义的递推方程(5.1)不包含导数.

我们还看到，多项式的表示和逼近与消失矩数或最小化的小波矩有关. 因为对于某些信号和图像多项式通常是一个好的模型，这个性质是重要的.

尺度函数零矩的数目是与用信号的抽样对高分辨率尺度系数的逼近的"优度"有关的. 它们还影响尺度函数和小波的对称性与集中能力.

本节考虑在(2.13)中定义的基本的2带或2重的情形. 更一般的M带或M重情形在7.2节中讨论.

6.1　K-正则尺度滤波器

这里，我们从定义一个酉尺度滤波器(unitary scaling filter)出发，它是具有来自基本递推方程(5.1)的系数$h(n)$的有限脉冲响应滤波器，由(5.10)它满足容许性条件，且由(5.14)它满足正交性条件，即

$$\sum_n h(n)=\sqrt{2}\text{ 和 }\sum_k h(k)h(k+2m)=\delta(m). \tag{6.1}$$

术语"尺度滤波器"来自于Mallat算法，并且与第3章中讨论的滤波器组有关. 术语"酉"来自于滤波器组语言中表示的正交性条件，这在第8章中说明.

一个酉尺度滤波器称为K-正则的(K-regular)，如果它的z-变换在$z=e^{i\pi}$上有K阶零点. 这看起来像

$$H(z)=\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K Q(z), \tag{6.2}$$

其中$H(z)=\sum_n h(n)z^{-n}$是尺度系数$h(n)$的z-变换,并且$Q(z)$在$z=e^{i\pi}$上没有极点或零点. 注意,我们给出的是$h(n)$的正则性的一个定义,不是尺度函数$\varphi(t)$或小波$\psi(t)$的正则

性的定义．它们有关系,但是不一样．由(5.20)注意到,任何酉尺度滤波器至少是$K=1$正则的．

尺度滤波器的长是N，这意味着$h(z)$是$N-1$次多项式．因为在$z=-1$是K阶零点，所以多项式$Q(z)$是$N-1-K$次．$\varphi(t)$的存在性要求零阶矩是$\sqrt{2}$，这是(6.1)中线性条件的结果．对于正交性满足的条件需要$N/2$个条件，它们是(6.1)中的二次方程．这是指，正则性的阶数用

$$1 \leqslant K \leqslant \frac{N}{2}. \tag{6.3}$$

限制．Daubechies 使用自由度，对于一个给定的N得到最大的正则性，或者对于一个给定的正则性得到最小的N. 另外，允许一个比较小的正则性，并且为了其他的设计目的使用得到的额外的自由度．

正则性的定义借助于传递函数的零点，或者借助于由尺度系数得到的有限脉冲响应滤波器的频率响应函数的零点给出．这与如下事实有关：一个函数的可微性束缚它的傅里叶级数系数，当下标趋于无穷时，傅里叶级数的系数非常快地下降，或者当频率趋于无穷时，傅里叶变换的模非常快地下降．尺度函数的傅里叶变换与系数$h(n)$的有限脉冲响应滤波器的频率响应之间的关系由无穷乘积(5.74)给出．由这些关系，我们说，因为$H(z)$是低通的，并且如果它在$z=-1$(即$\omega=\pi$)有高阶零点，则$\varphi(t)$的傅里叶变换迅速地下降，所以$\varphi(t)$应是光滑的．这证明是成立的．

其次，定义$\varphi(t)$与$\psi(t)$的k阶矩(量)为

$$m(k) = \int t^k \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6.4}$$

和

$$m_1(k) = \int t^k \psi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.5}$$

并且定义$h(n)$与$h_1(n)$的离散的k阶矩(量)为

$$\mu(k) = \sum_n n^k h(n), \tag{6.6}$$

和

$$\mu_1(k) = \sum_n n^k h_1(n). \tag{6.7}$$

$h(n)$的部分矩(抽样矩)定义为

$$\nu(k,\ell) = \sum_n (2n+\ell)^k h(2n+\ell). \tag{6.8}$$

注意，$\mu(k)=\nu(k,0)+\nu(k,1)$.

74

由这些公式和基本递推方程(5.1)，我们得到[GB92b]

$$m(k) = \frac{1}{(2^k-1)\sqrt{2}} \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} \mu(\ell)\, m(k-\ell) \tag{6.9}$$

这能够用代(5，1)入(6.4)，改变变量，及使用(6.6)导出．类似地，我们得到

$$m_1(k) = \frac{1}{2^k\sqrt{2}}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\mu_1(\ell)m(k-\ell) \tag{6.10}$$

这些公式精确地计算在(6.4)与(6.5)中积分定义的矩，它是离散矩与低阶连续矩的一个简单的有限卷积．一个类似的公式对于 M 带情形也成立，这在 7.2 节中描述[DB92b]. 使用(6.9)与(6.10)，由离散矩计算连续矩的一个 MATLAB 程序在附录 C 中给出．

6.2 小波消失矩

要求 $\psi(t)$ 的矩是 0 有若干有用的结果．下述三个定理说明 K-正则尺度滤波器的各种等价特征，这涉及到我们对于光滑的尺度函数与小波以及多项式表示的描述．

定理 20 （K-正则滤波器的等价特征） *一个酉尺度滤波器是 K-正则的，当且仅当下述等价叙述成立：*

1. 小波滤波器的所有矩是 0，即对于 $k=0, 1, \cdots, (K-1)$，$\mu_1(k)=0$.
2. 小波的所有矩是 0，即对于 $k=0, 1, \cdots, (K-1)$，$m_1(k)=0$.
3. 对于 $k=0, 1, \cdots, (K-1)$，尺度滤波器的部分矩是相等的．
4. 尺度滤波器的频率响应在 $\omega=\pi$ 有一个 K 阶零点，即(6.2)成立．
5. 对于 $k=1, 2, \cdots, 2K-1$，尺度滤波器的模平方频率响应的 K 阶导数在 $\omega=0$ 是 0.
6. 直到 $K-1$ 次的所有多项式序列可以表示为平移的尺度滤波器的一个线性组合．
7. 直到 $K-1$ 次的所有多项式可以表示为在任一尺度上平移的尺度函数的一个线性组合．

这是一个很有用的结果[SHGB93, Hel95]. 它不仅束缚对正则性的零矩量的数目，而且还束缚可由加权的与平移的尺度函数的和精确表示的多项式的次数．

75

定理 21 *如果 $\psi(t)$ 是 K 次可微的和快速衰减的，那么 1 到 $K-1$ 阶小波矩变为 0 [Dau92]，即*

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}\psi(t)\right| < \infty, \quad 0 \leqslant k \leqslant K \tag{6.11}$$

推出

$$m_1(k) = 0. \quad 0 \leqslant k \leqslant K \tag{6.12}$$

但是，这个定理的逆不成立．然而，我们能阐述 $\psi(t)$ 的可微性与定理 22 的消失矩的关系．

定理 22 *存在一个有限正整数 L，使得如果 $m_1(k)=0$，对于 $0\leqslant k\leqslant K-1$ 成立，那么*

$$\left|\frac{d^P}{dt^P}\psi(t)\right| < \infty, \tag{6.13}$$

对于 $LP>K$ 成立．

例如，一个三次可微的 $\psi(t)$ 必定具有三阶消失矩，但是三阶消失矩只能得到一次可微性．

这些定理表明 $h_1(n)$ 和 $\psi(t)$ 的矩、$H(\omega)$ 在 $\omega=0$ 与 $\omega=\pi$ 的光滑性以及多项式的表示之间的密切关系．还建立了 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 本身的光滑性之间的关系．

6.3 小波零矩设计的 Daubechies 方法

Daubechies 使用上述的关系证明了下述重要的结果，这个结果构造了具有最大消失矩的紧支撑的正交小波．

定理 23 形如

$$H(\omega) = \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^K \mathcal{L}(\omega), \tag{6.14}$$

在 $\omega=\pi$ 有 K 阶零点的 $h(n)$ 的离散时间傅里叶变换满足

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 2, \tag{6.15}$$

当且仅当 $L(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2$ 可以写为

$$L(\omega) = P(\sin^2(\omega/2)) \tag{6.16}$$

其中 $K\leqslant N/2$，

$$P(y) = \sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}y^k + y^K R\left(\frac{1}{2}-y\right) \tag{6.17}$$

并且 $R(y)$ 是一个奇次多项式，使得 $P(y)\geqslant 0$，对于 $0\leqslant y\leqslant 1$ 成立． [76]

如果 $R=0$，那么对于给定的正则性 $K=N/2$，长度 N 是最小的．如果 $N>2K$，那么包含 R 的第二项包含 y 的较高次幂项，其系数可用于除正则性以外的其他目的．

该定理的证明和讨论可以在 Daubechies[Dau88a, Dau92]中得到．由(5.20)知，因为 $h(n)$ 满足 $\varphi(t)$ 存在及具有正交的整数平移的必要条件，所以 $H(\omega)$ 在 $\omega=\pi$ 至少有一阶零点．现在，我们加限制于 $h(n)$ 以便可以在 $\omega=\pi$ 有尽可能高阶的零点．这解释了(6.14)的形式．由(5.22)中要求的正交性给出(6.15)．

因为在(6.15)中频域的要求借助于频率响应模的平方给出，谱的因子化用于确定 $H(\omega)$，所以 $h(n)$ 由 $|H(\omega)|^2$ 得到．方程(6.14)变成

$$|H(\omega)^2| = \left|\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right|^{2K}|\mathcal{L}(\omega)|^2. \tag{6.18}$$

如果使用函数记号

$$M(\omega) = |H(\omega)^2| \text{ 和 } L(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2, \tag{6.19}$$

那么(6.18)变成

$$M(\omega) = |\cos^2(\omega/2)|^K L(\omega). \tag{6.20}$$

因为 $M(\omega)$ 和 $L(\omega)$ 是 ω 的偶函数，所以它们可以写为 $\cos(\omega)$ 的多项式，并且，由

$\cos(\omega)=1-2\sin^2(\omega/2)$，方程(6.20)变成

$$\tilde{M}(\sin^2(\omega/2)) = |\cos^2(\omega/2)|^K P(\sin^2(\omega/2)), \tag{6.21}$$

然后，由变量替换 $y=\sin^2(\omega/2)=1-\cos^2(\omega/2)$，(6.21)变成

$$\tilde{M}(y) = (1-y)^K P(y), \tag{6.22}$$

其中 $P(y)$是一个$(N-K)$次多项式，它一定是正的，因为它必须因子化以由(6.19)求得$H(\omega)$. 现在，这借助于更易于使用的新的变量给出(6.14).

为了使这种描述保持一组规范正交小波基，现在我们需要(6.22)满足(5.22)

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 2, \tag{6.23}$$

使用(6.19)和(6.22)，这变成

$$M(\omega) + M(\omega+\pi) = (1-y)^K P(y) + y^K P(1-y) = 2. \tag{6.24}$$

这种形式的方程有一个由使用 Bezout 定理求得的显式的解．细节是由 Daubechies [Dau92]给出的．如果所有$(N/2-1)$个自由度用于置小波矩为零，那么我们令 $K=N/2$并且(6.24)的解由

$$P(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k \tag{6.25}$$

77 给出，这给出了 Daubechies 极大零小波矩设计的完全参数化．同时还给出一个很直接的过程，来计算满足这些条件的 $h(n)$. Herrmann 对于 Butterworth 的或极大扁平有限脉冲响应数字滤波器的设计推导出了这种表示[Her71].

如果正则性是 $K<N/2$，$P(y)$必定次数较高，并且解的形式为

$$P(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R\left(\frac{1}{2}-y\right), \tag{6.26}$$

其中选取 $R(y)$ 给出想要的滤波器的长度 N，以便得到一些其他希望的性质并给出$P(y)\geqslant 0$.

计算 $h(n)$实际值的步骤是，首先选择 $h(n)$的长度 N(或者想要的正则性)，然后因子化$|H(\omega)|^2$，其中可以自由选择 $H(\omega)$的根．使用传递函数的 z 变换，及时域中的卷积而不是频域中(升高一次幂的)相乘，更容易实现计算．在附录 C 中用 MATLAB 程序 `[hn, h1n] = daub(N)`实现，其中(6.25)中的多项式系数由二项式系数公式计算．这个多项式在 MATLAB 中用 `roots` 命令因子化，并且根是由多项式变量 y_ℓ 映射到(6.2)的变量 z_ℓ，首先使用 $\cos(\omega)=1-2y_\ell$，然后由于 $i\sin(\omega)=\sqrt{\cos^2(\omega)-1}$与 $e^{i\omega}=\cos(\omega)\pm i\sin(\omega)$，我们使用 $z=e^{i\omega}$. 这些变量替换是 Herrmann[Her71]和 Daubechies[Dau92]使用的.

检验 MATLAB 程序以看到如何实现这些的细节．程序使用 `sort` 命令排序 $H(z)H(1/z)$的根，之后，选择 $N-1$ 个最小的根，给出极小相位 $H(z)$的因式分解．你可以选择$N-1$个根的不同的集合，以得到更多的线性相位或者极大相位．这种选择可以在同样长度的

Daubechies 小波中有一些改变. 这个的 M 带的推广由 Heller 在[SHGB93, Hel95]中得到的. 在[Dau92]中, Daubechies 还考虑了交替取单位圆内和单位圆外的零点, 以给出一个更对称的 $h(n)$. 对于具有紧支撑且保持正交小波的实的 $h(n)$, 完全对称是不可能的, 然而对于复的 $h(n)$、双正交系统、无限长的 $h(n)$以及多小波, 对称是可能的. 使用这种零矩设计方法还将保证得到的小波系统是一组规范正交基.

如果所有的自由度用于设置矩为零, 那么在(6.14)中令 $K=N/2$, 并且接着执行上述过程. 在不同于 $\omega=\pi$ 处, 显式地置一个特别的零点对是可能的. 在这种情形下, 我们将在(6.14)中使用 $K=(N/2)-2$. 其他的约束在本章的后面以及后面的章节中得到.

为了描述 Daubechies 小波系统的一些特征. 表 6-1 对于长度为 8 的 Daubechies 系统, 给出了尺度函数系数 $h(n)$ 与小波系数 $h_1(n)$, 以及相应的离散的尺度系数矩与小波系数矩. 注意, 小波系数的$N/2=4$个零矩和零阶尺度系数矩 $\mu(0)=\sqrt{2}$.

表 6-1 对于 Daubechies-8, 尺度函数和小波的系数以及它们的离散矩

n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
0	0.23037781330890	0.01059740178507	1.414213	0	0
1	0.71484657055292	0.03288301166689	1.421840	0	1
2	0.63088076792986	-0.03084138183556	1.429509	0	2
3	-0.02798376941686	-0.18703481171909	0.359097	0	3
4	-0.18703481171909	0.02798376941686	-2.890773	12.549900	4
5	0.03084138183556	0.63088076792986	-3.453586	267.067254	5
6	0.03288301166689	-0.71484657055292	23.909120	3585.681937	6
7	-0.01059740178507	0.23037781330890			

表 6-2 对于长度为 6, 4, 2 的 Daubechies 尺度系数、小波系数、尺度系数矩和小波系数矩, 给出同样的信息. 再次注意, 多少个离散小波矩是零.

表 6-3 对于长度为 6 与 4 的 Daubechies 系统, 给出了尺度函数 $\varphi(t)$ 与小波 $\psi(t)$ 的连续矩. 离散矩是由(6.6)与(6.7)定义的系数的矩, 而连续矩由(6.4)与(6.5)定义, 使用(6.9)与(6.10)计算, 程序在附录 C 中列出.

表 6-2 Daubechies 尺度函数和小波的系数以及它们的矩

	Daubechies $N=6$				
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
0	0.33267055295008	-0.03522629188571	1.414213	0	0
1	0.80689150931109	-0.08544127388203	1.155979	0	1
2	0.45987750211849	0.13501102001025	0.944899	0	2
3	-0.13501102001025	0.45987750211849	-0.224341	3.354101	3
4	-0.08544127388203	-0.80689150931109	-2.627495	40.679682	4
5	0.03522629188571	0.33267055295008	5.305591	329.323717	5

（续）

	Daubechies $N=4$				
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
0	0.48296291314453	0.12940952255126	1.414213	0	0
1	0.83651630373781	0.22414386804201	0.896575	0	1
2	0.22414386804201	-0.83651630373781	0.568406	1.224744	2
3	-0.12940952255126	0.48296291314453	-0.864390	6.572012	3

	Daubechies $N=2$				
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
0	0.70710678118655	0.70710678118655	1.414213	0	0
1	0.70710678118655	-0.70710678118655	0.707107	0.707107	1

表 6-3 Daubechies 尺度函数与小波的连续矩和离散矩

	$N=6$			
k	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	$m(k)$	$m_1(k)$
0	1.4142135	0	1.0000000	0
1	1.1559780	0	0.8174012	0
2	0.94448992	0	0.6681447	0
3	-0.2243420	3.3541019	0.4454669	0.2964635
4	-2.6274948	40.6796819	0.1172263	2.2824642
5	5.3055914	329.3237168	-0.0466511	11.4461157

	$N=4$			
k	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	$m(k)$	$m_1(k)$
0	1.4142136	0	1.0000000	0
1	0.8965755	0	0.6343975	0
2	0.5684061	1.2247449	0.4019238	0.2165063
3	-0.8643899	6.5720121	0.1310915	0.7867785
4	-6.0593531	25.9598790	-0.3021933	2.0143421
5	-23.4373939	90.8156100	-1.0658728	4.4442798

这些表既表明了一般的小波系统的特性，也表明了 Daubechies 系统的特征．我们看到，(6.1)与(5.10)的 $\mu(0)=\sqrt{2}$对于(5.1)的尺度函数解的存在是必需的，并且(5.32)与(5.29)的 $\mu_1(0)=m_1(0)=0$ 对于基函数的正交性是必需的．规范正交性要求(2.25)，这可由比较 $h(n)$与 $h_1(n)$看出，由(5.53)和(5.45)，它要求 $m(0)=1$. 在这些条件满足之后，还有$N/2-1$ 个自由度，Daubechies 使用这些自由度置小波矩 $m_1(k)$等于零．对于长度 6，有两个零小波矩，而对于长度 4，有一个零小波矩．对于所有比较长的 Daubechies 小波系统，我们恰好有$N/2-1$ 个零小波矩，添加一个 $m_1(0)=0$，总共有$N/2$ 个零小波矩．注意，像在(6.32)中说明的，$m(2)=m(1)^2$，并且偶阶尺度函数矩的某些值之间存在关系，这将在(6.52)到(6.55)中说明．

正如前面叙述的，这些系统有最大数目的小波零矩，对于尺度函数和小波，这给出了高阶光滑性．图 6-1 与 6-2 表示 $N=4$，6，8，10，12，16，20，40 的 Daubechies 尺度

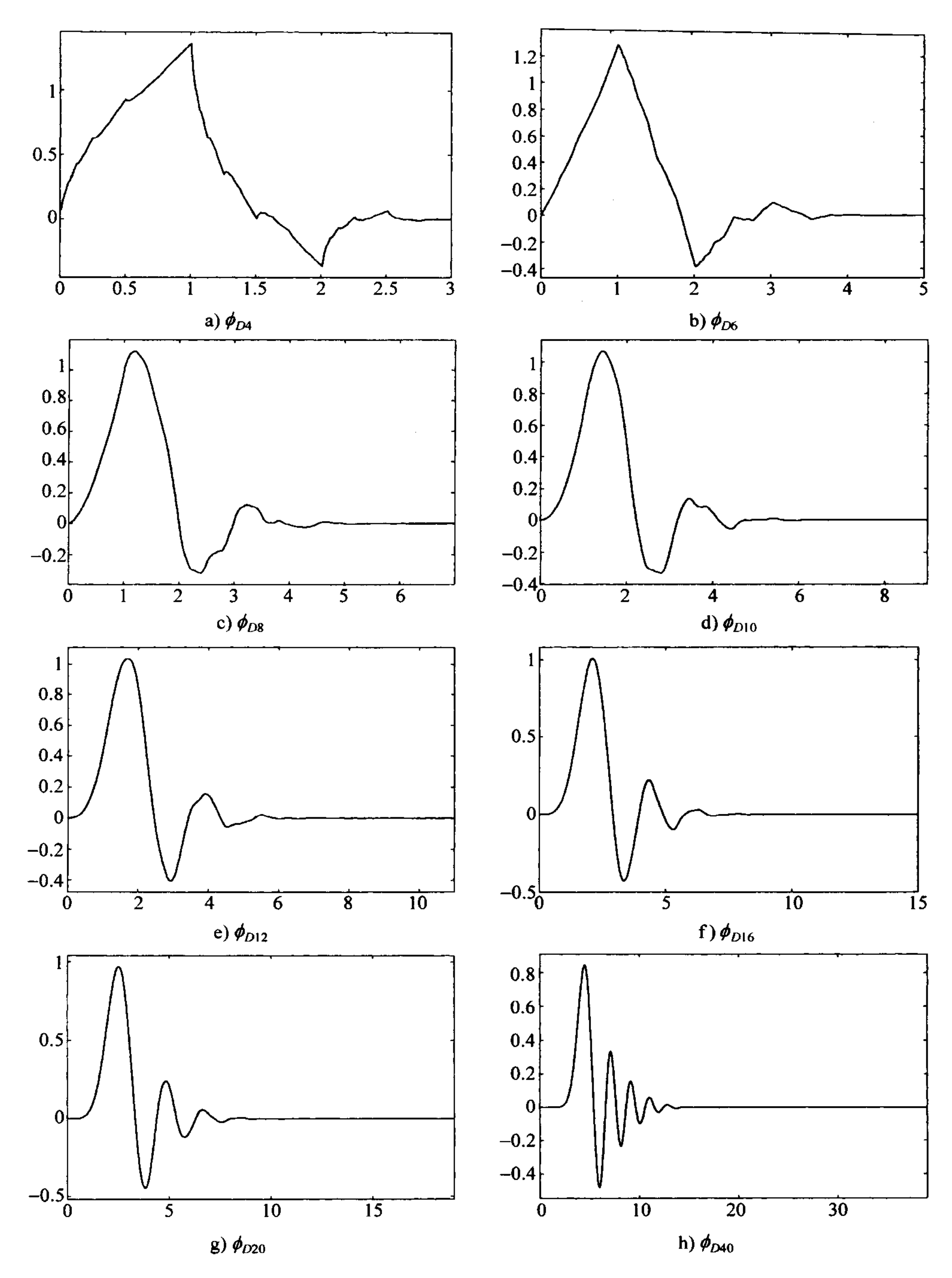


图 6-1 Daubechies 尺度函数，$N=4$，6，8，…，40

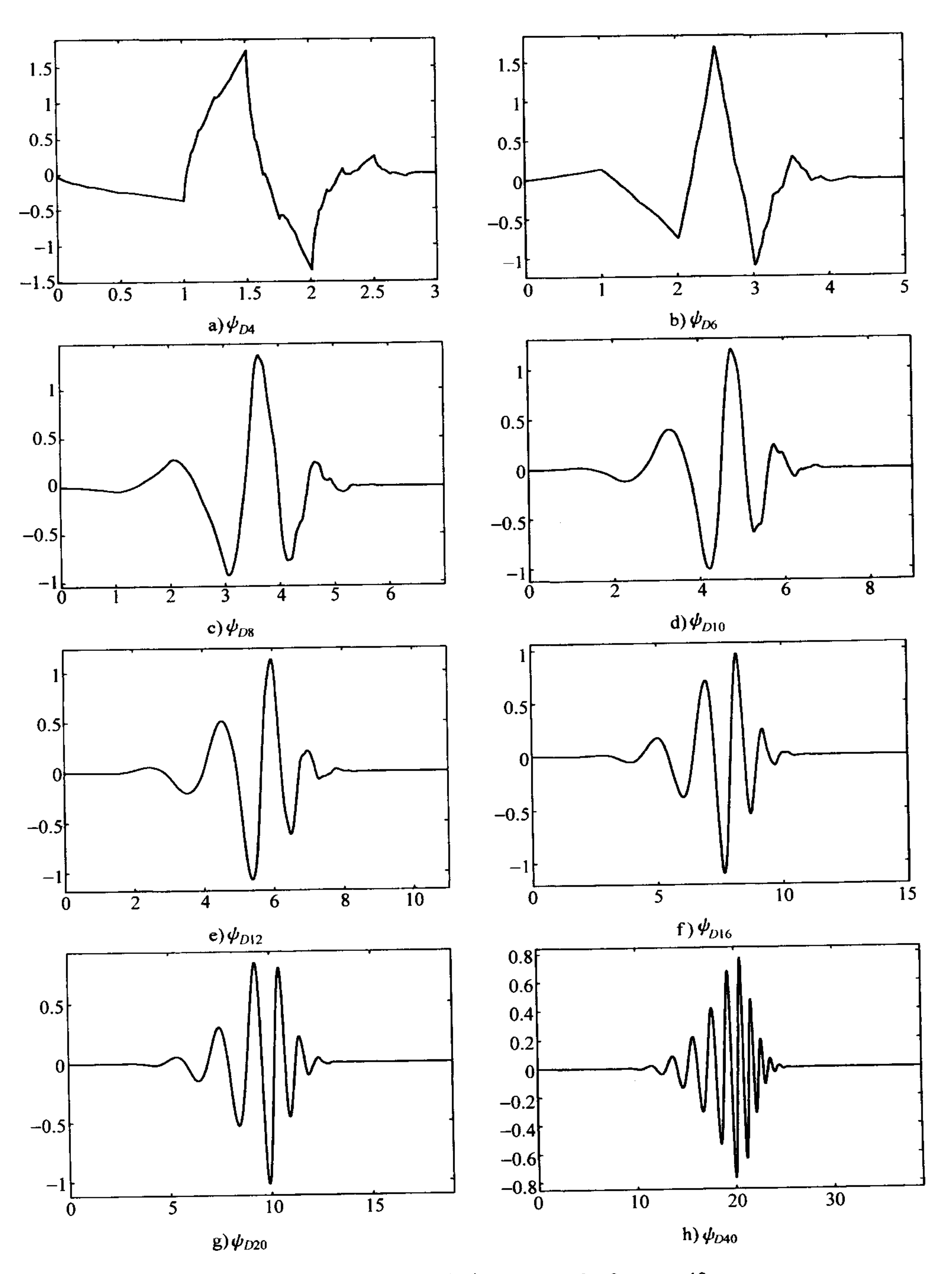


图 6-2 Daubechies 小波，$N=4, 6, 8, \cdots, 40$

函数和小波．用在5.9节与第6章中描述的技巧生成系数．MATLAB程序在附录C中列出，$h(n)$的值可以在[Dau92]中找到，或者用程序算出．注意，当N增大时，光滑性增加．对于$N=2$，尺度函数是不连续的；对于$N=4$，它连续但不可微；对于$N=6$，仅仅一次可微；对于$N=14$，它是二次可微的，而对于比较长的$h(n)$类似．对于充分长的$h(n)$，我们能得到任意次的可微性．

Daubechies系数是由极大化零矩数目得到的．这给出正则的尺度函数和小波，然而，使用自由度极大化$\varphi(t)$的可微性，而不是极大化零矩数目，这是可能的．但这不容易参数化，并且它只给出比Daubechies系统[Dau92]稍大点的光滑性．

78 ~ 82

在(6.18) $|H(\omega)|^2$的谱因子化中，由选择不同的因子得到的Daubechies尺度函数的例子，可以在[Dau92]中找到．

6.4 非最大正则性小波设计

如果尺度系数滤波器的长度比想要的正则性的2倍大，即$N>2K$，那么应当使用(6.26)的参数化，并且必须确定多项式$R(y)$中的系数．我们感兴趣的可能性是，设计一个系统使得在$\omega=\pi/2$与$\omega=\pi$之间具有$h(\omega)$的一个或更多的零点，而剩余的在$\omega=\pi$的零点保证正则性．这将给出滤波器组中比较好的频率分离，以交换降低的正则性和低次多项式表示．

如果$H(\omega)$的一个零点在$\omega=\omega_0$，那么，利用

$$M(\omega_0)=0 \text{ 和 } \left.\frac{\mathrm{d}M(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0}=0, \tag{6.27}$$

中的条件与(6.26)中的条件，给出一个线性联立方程组，解这个方程组求得尺度系数$h(n)$.

一个基于Remez交换算法的设计系统，可以设计一个正交小波系统，使其具有特殊的正则性且在$H(\omega)$的抑止频带中具有最优切比雪夫(Chebyshev)性质．这个算法与它的使用约束最小二乘准则[SLB97]的变形在[LSOB94]中描述，并且在[RD94]中使用另外的切比雪夫设计．

设计小波系统的另一种方法是，设置一个最优化准则并且使用一个一般的约束最优化程序(例如用MATLAB最优化工具箱)，设计以存在性和正交性条件作为约束的$h(n)$．这种方法用于生成表6-7中描述的许多滤波器．田军使用牛顿法[Tia96，TW95]设计了具有零矩的小波系统．

6.5 小波零矩与光滑性的关系

由定理21与定理22看到，在零小波矩与光滑性之间有一种关系，但不是紧密的关系．虽然在实际应用中可微性的阶数可能不是最重要的度量，但是理论上最重要的问题应该是寻

找在应用之前可以合理提出的问题.

首先，我们必须定义光滑性. 从数学的观点看，光滑性本质上与可微性是相同的，并且至少有两种方法度量. 第一种是局部的(赫尔德(Hölder)度量)，而第二种是全局的(索伯列夫(Sobolev)度量). 在小波设置上估计度量的数值算法是由 Rioul[Rio92]和 Heller 与 Wells[HW94，HW96a]分别对赫尔德度量和索伯列夫度量得到的.

定义 1(赫尔德连续性) *假设 φ: $\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ 并且设 $0<\alpha\leqslant 1$. 那么，函数 φ 是 α 阶赫尔德*

83

连续的，如果存在一个常数 c，使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant c|x-y|^{\alpha} \text{ 对所有 } x,y\in\mathbf{R}. \tag{6.28}$$

基于上述定义，我们观察得，如果 $\alpha>1$，则 φ 是一个常数. 因此，对于确定 $\alpha>1$ 阶的正则性不是很有用. 然而，使用上述的定义，任何 $r>0$ 阶的赫尔德正则性定义如下：

定义 2(赫尔德正则性) *函数 φ: $\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ 是 $r=P+\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 阶正则的，如果 $\varphi\in C^{P}$ 并且它的 P 阶导数是 α 阶赫尔德连续的.*

定义 3(索伯列夫正则性) *假定 φ: $\mathbf{R}\to\mathbf{C}$，那么称 φ 属于 s 阶索伯列夫空间($\varphi\in H^{s}$)，如果*

$$\int_{\mathbf{R}}(1+|\omega|^{2})^{s}|\hat{\Phi}(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega<\infty. \tag{6.29}$$

注意到，虽然索伯列夫正则性没有明确给出可微性的阶，但是它产生关于赫尔德正则性 r 的下界与上界，并且如果 $\varphi\in L^{2}$，则给出 φ 的可微性. 这可以由下述包含关系看出

$$H^{s+1/2}\subset C^{r}\subset H^{s}. \tag{6.30}$$

Volkmer[Vol92]和 Eirola[Eir92]得到一个很重要的结果，对于 Daubechies 尺度函数的赫尔德正则性指标(指数)，给出一个精确的渐近公式.

定理 24 *当尺度滤波器的长度趋于无穷时，Daubechies 尺度函数的赫尔德正则性指标的极限是*[Vol92]

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\alpha_{N}}{N}=\left[1-\frac{\log(3)}{2\log(2)}\right]=(0.2075\cdots). \tag{6.31}$$

A. Cohen 和 J. P. Conze 也证明了这个结果，这个结果结合比较短长度的经验计算，很好地展示了 Daubechies 尺度函数光滑性. 这如图 6-3 所示，其中对于极大光滑情形和 Daubechies 情形，画出了尺度滤波器长度的赫尔德指标.

极大光滑尺度函数的性质问题是由 Lang 与 Heller 在[LH96]中凭经验提出的. 他们使用 Rioul 算法计算尺度函数的赫尔德光滑性，这个尺度函数已经设计为具有最大的赫尔德光滑性，并且此结果连同作为尺度滤波器长度函数的 Daubechies 尺度函数的光滑性一起展示在图 6-3 中. 对于比较长的长度，可以对设计的系统给出一个尺度函数，这个尺度函数比 Daubechies 设计的尺度函数光滑性高两次. 然而，在大多数应用中，更高的赫尔德光滑性或许是不重要的.

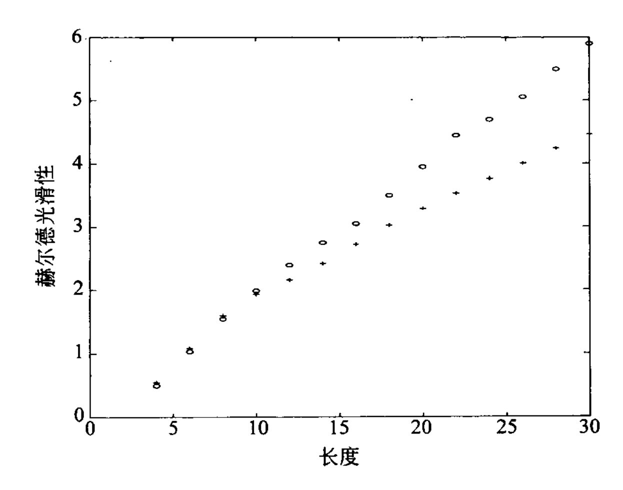


图 6-3 作为 Daubechies(+)和极大光滑(o)小波系数长度的函数的赫尔德光滑性

图 6-4 描绘了作为极大光滑的和 Daubechies 设计的尺度函数系数数目的函数，零矩(在 $\omega=\pi$ 的零点)的数目．

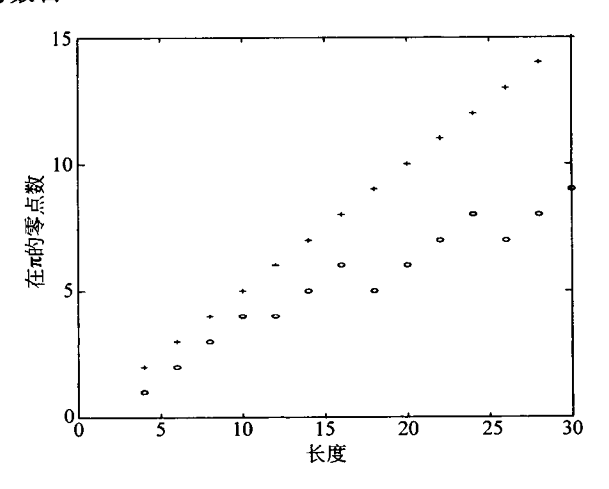


图 6-4 作为 Daubechies(+)和极大光滑(o)小波系数长度的函数在 $\omega=\pi$ 的零点数

这个图的一种情形是 $N=26$，其中 Daubechies 光滑性是 $S_H=4.005$，而极大的光滑性是 $S_H=5.06$. 极大光滑尺度函数具有比 Daubechies 尺度函数高一阶的连续导数．

Heller 与 Wells 的工作[HW94，HW96a]给出尺度系数的性质与尺度函数和小波的光滑性之间一种比较好的结合．这是对于 $M=2$ 的尺度因子或重数和一般的整数 M 做的．

84
~
85

借助于可微性给出的光滑性的常见定义，对于某些信号处理的应用，也许不是最好的度量．如果信号作为一个数值的序列给出，而不是作为连续变量的一个函数，光滑性的含

义是什么？或许利用信号的变差(variation)可以更好地理解[GB95c, OB96b, Ode96].

6.6 尺度函数的消失矩

当小波矩给出关于 $H(\omega)$ 的扁平性和 $\psi(t)$ 的光滑性的信息时，$\varphi(t)$ 与 $h(n)$ 的矩就是尺度函数和小波变换的“局部化”特征与对称特征的度量．由(5.10)知，$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$，并且，在规范化之后，$\int \varphi(t)\,dt = 1$．使用(6.9)，我们可以证明[GB92b]，对于 $K \geqslant 2$，有

$$m(2) = m^2(1). \tag{6.32}$$

这个可以在表 6-3 中看到．这个结果的一种推广是由 Johnson[JMNK96]得到的，且在(6.52)到(6.55)中给出．

零矩的有效性的更一般的描述可以由下面考虑的两种逼近给出．事实上，这个分析给出一个很重要的深入了解零矩有效性的结果．满足其他特定要求的尺度函数零矩在6.9节中给出．

6.7 用尺度函数投影逼近信号

给出一个信号 $f(t)$ 在尺度函数子空间 $\mathcal{V}_j$ 上的正交投影，并表示为

$$P^j\{f(t)\} = \sum_k \langle f(t), \varphi_{j,k}(t)\rangle \varphi_{j,k}(t), \tag{6.33}$$

这给出了 $f(t)$ 在 $\mathcal{V}_j$ 中的分量，它是在 $\mathcal{V}_j$ 中对 $f(t)$ 的最佳最小二乘逼近．

在(6.5)中给出的 $\psi(t)$ 的 ℓ 阶矩定义为

$$m_1(\ell) = \int t^{\ell}\psi(t)\,dt. \tag{6.34}$$

现在，我们可以借助于小波零矩数和尺度，叙述投影(6.33)作为对 $f(t)$ 的一种逼近与 $f(t)$ 的重要关系．

定理 25 *如果 $m_1(\ell) = 0$ 对 $\ell = 0, 1, \cdots, L$ 成立，那么 L^2 误差是*

$$\varepsilon_1 = \| f(t) - P^j\{f(t)\} \|_2 \leqslant C2^{-j(L+1)}, \tag{6.35}$$

其中 C 是一个常数，它与 j 和 L 无关，但是依赖于 $f(t)$ 和小波系统[GLRT90, Uns96].

这表明，在任一给定的尺度上，当小波零矩数(和尺度滤波器的长度)趋于无穷时，信号在这个尺度子空间的投影逼近函数本身．这还表明，对于任一给定的长度，当尺度趋于无穷时，投影趋于函数．这些逼近按指数收敛．这个投影如图 6-5 所示．

86

6.8 用信号的抽样逼近尺度系数

第二个逼近涉及使用 $f(t)$ 的抽样作为(6.33)中 $f(t)$ 的小波展开中的内积系数．我们表示抽样逼近为

$$S^j\{f(t)\} = \sum_k 2^{-j/2} f(k/2^j)\varphi_{j,k}(t), \tag{6.36}$$

并且尺度函数矩为

$$m(\ell) = \int t^\ell \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6.37}$$

并且可以叙述[Tia96]如下.

定理 26 如果 $m(\ell)=0$ 对 $\ell=0, 1, \cdots, L$ 成立，那么 L^2 误差是

$$\varepsilon_2 = \| S^j\{f(t)\} - P^j\{f(t)\} \|_2 \leqslant C_2 2^{-j(L+1)}, \tag{6.38}$$

其中 C_2 是一个常数，它与 j 和 L 无关，但是依赖于 $f(t)$ 和小波系统.

这个定理类似于前一个定理的逼近或收敛，但是它将 j 尺度子空间上 $f(t)$ 的投影与同一子空间的抽样逼近联系起来. 这些逼近如图 6-5 所示.

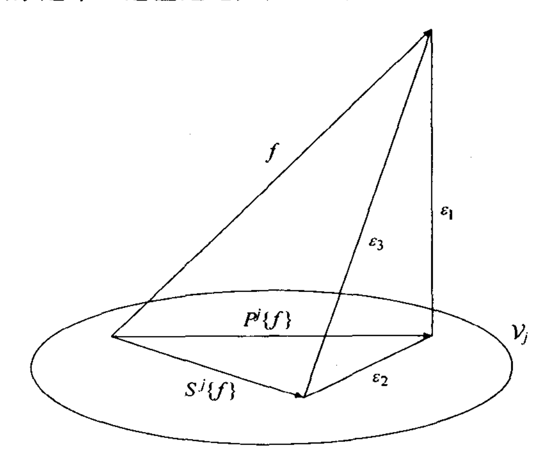


图 6-5 $f(t)$ 在一个有限尺度上的逼近与映射

这个"向量空间"的描述表明了两种类型逼近的性质与关系. 抽样作为内积使用是展开子空间 $\mathcal{V}_j$ 内的一种逼近. 使用有限展开来表示一个信号 $f(t)$ 是从 L^2 到子空间 $\mathcal{V}_j$ 的一种逼近. 定理 25 和定理 26 表明，对于小波，这些逼近的性质是很好的.

87

关于信号的这些逼近的效果如图 6-6 所示，其中带有一个很光滑分量(一条正弦曲线)和一个不连续分量(一个方波)的信号，使用抽样作为高分辨率尺度函数系数，展开为一个小波级数. 注意，投影到越来越低的分辨率尺度上的效果.

如果我们考虑一个小波系统，其中尺度函数矩和小波矩设置零的数目相同，并且这个数目尽可能地大，那么下述定理成立[WZ94, Tia96].

定理 27 如果 $m(\ell)=m_1(\ell)=0$，对于 $\ell=1, 2, \cdots, L$ 成立，并且 $m_1(0)=0$，那么 L^2 误差是

$$\varepsilon_3 = \| f(t) - S^j\{f(t)\} \|_2 \leqslant C_3 2^{-j(L+1)}, \tag{6.39}$$

其中 C_3 是一个常数，它与 j 和 L 无关，但是依赖于 $f(t)$ 和小波系统.

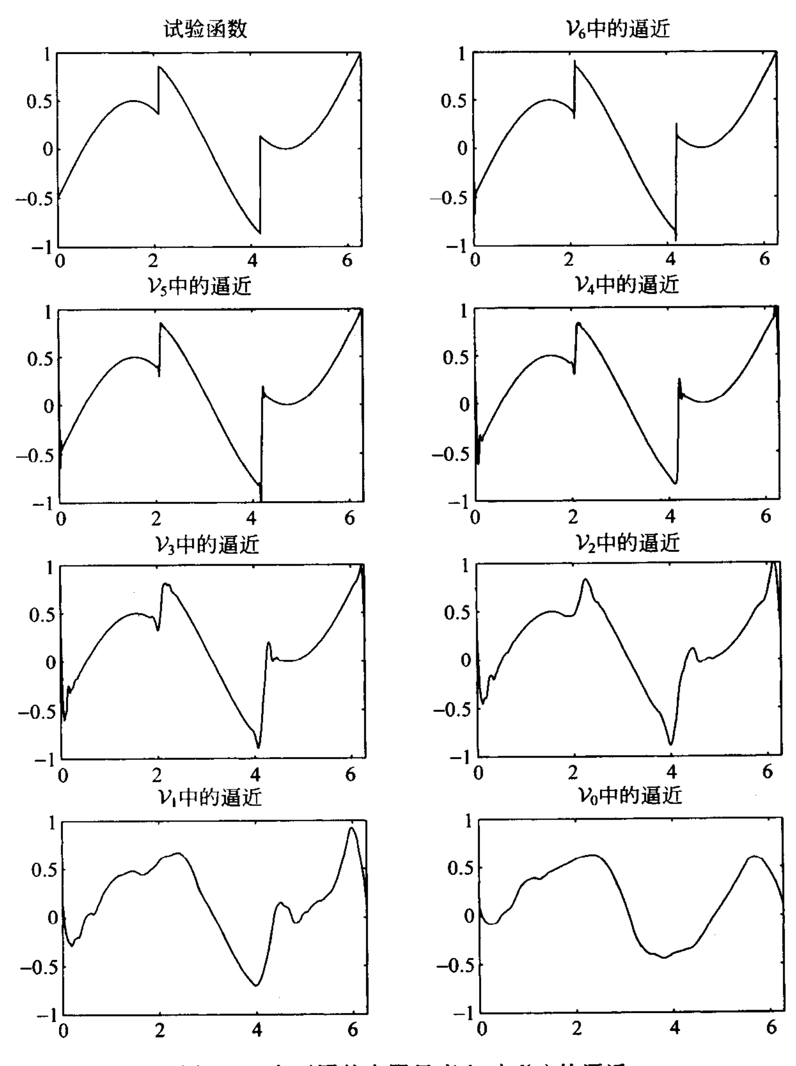


图 6-6 在不同的有限尺度上对 $f(t)$ 的逼近

这个小波系统称为 Coifman 小波系统，这里我们看到，对于这个小波系统，使用抽样作为内积展开系数是一种极好的逼近．这说明，使用信号的抽样作为滤波器组的输入给出合适的小波分析是正确的．这种逼近还在图 6-5 和[WB97]中用图描述．

6.9 Coiflet 和相关的小波系统

由前面的逼近定理，我们看到小波零矩与尺度函数零矩混合用于信号抽样，对于只有小波零矩的小波可以给出较好的结果．不仅强制尺度函数零矩用抽样给出展开系数一种比

较好的逼近，而且它还使得尺度函数更对称．事实上，在某些应用中，特征或许比抽样逼近更重要．

Daubechies 考虑了这些小波的设计，这些小波是由 Coifman 提出的[Dau92，Dau93，BCR91]. Gopinath[Gop90，GB92b]和 Wells[WZ94，TW95]说明了，尺度函数零矩怎样由抽样给出高分辨率尺度系数的一种比较好的逼近. Tian 和 Wells[Tia96，TW95]还设计了具有很好性质且带有混合零矩的双正交系统．

Coifman 小波系统(Daubechies 命名的基函数"Coiflet")是一个正交的多分辨小波系统，满足

$$\int t^k \varphi(t)\,\mathrm{d}t = m(k) = 0, \text{对于 } k = 1,2,\cdots,L-1, \tag{6.40}$$

$$\int t^k \psi(t)\,\mathrm{d}t = m_1(k) = 0, \text{对于 } k = 1,2,\cdots,L-1. \tag{6.41}$$

由于正交性的需要，除了要求一个 $m_1(0)$ 的零矩外，这个定义强制要求有至少 $L-1$ 个尺度函数零矩和至少 $L-1$ 个小波零矩．这个系统称为是 L 阶的或 L 次的，并且有时还要满足如下要求：尺度函数滤波器 $h(n)$ 的长度 N 是最短的[Dau92，Dau93].

88～89

因为长度为 4 的小波系统只有一个自由度，所以不能同时有尺度函数零矩和小波零矩(见表 6-6). Tian[Tia96，TW95]得到了四个长度为 6 的 coiflet 的公式．它们是

$$h = \left[\frac{-3+\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \frac{7-\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}, \frac{7+\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}, \frac{5+\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}\right], \tag{6.42}$$

或

$$h = \left[\frac{-3-\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \frac{7+\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}, \frac{7-\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}, \frac{5-\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}\right], \tag{6.43}$$

或

$$h = \left[\frac{-3+\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}, \frac{13+\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}, \frac{9-\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}\right], \tag{6.44}$$

或

$$h = \left[\frac{-3-\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}, \frac{13-\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}, \frac{9+\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}\right], \tag{6.45}$$

其中第一个公式(6.42)给出与 Daubechies[Dau92，Dau93](修正的)和 Odegard[BO96]相同的结果，并且第三个公式给出与 Wickerhauser[Wic95]相同的结果．表 6-4 中包括了由(6.42)得到的结果及尺度函数和小波的离散矩(对于 $k=0$，1，2，3，$\mu(k)$ 和 $\mu_1(k)$)．一个长度为 6 的 Coifman 系统的设计指定一个尺度函数零矩和小波零矩(除 $\mu_1(0)=0$ 以外)，但是我们事实上得到一个额外的尺度函数零矩．由[GB92b]知，这是 $m(2)=m(1)^2$ 的结果．换句话说，我们得到的尺度函数零矩比指明的两个自由度多一个．这对于所有 $N=6\ell(\ell=1,2,3,\cdots,)$ 成立，并且是后面描述的尺度函数矩与小波矩之间相互影响的结果．

小波零矩的性质是平移不变的，但是尺度函数零矩是平移依赖的[BCR91]. 所以，对于尺度函数必须使用一个特定的平移. 对于表6-4中长度为6的例子，这个平移是2，但是不同于(6.44)与(6.45)中的解. 比较这个表与表6-2中给出的Daubechies长度为6的尺度函数和小波相应的表，其中在那里有两个离散小波零矩——刚好与设计中的自由度一样多.

(6.42)的尺度函数是对称的，但是没有围绕它的中心，而在(6.43)、(6.44)与(6.45)中的另外三个设计都是不对称的.(6.42)的尺度函数还是光滑的，并且(6.44)的尺度函数只是稍微减小光滑性，但是(6.43)的尺度函数是很粗糙的，并且(6.45)的尺度函数似乎是分形的. 检验频率响应$H(\omega)$和有限脉冲响应滤波器$h(n)$的零点位置表明，(6.42)和(6.44)的频率响应很类似于(6.43)的频率响应，有些不正则但却是单调的，并且(6.45)在单位圆上的点$\omega=\pi/3$有一个零点，即对于一组正交基不满足Cohen条件[CS93]. 还值得注意的是，(6.42)中的设计具有最大的赫尔德光滑性. 这四种设计都满足同样的必要条件，但有很不同的特征. 因此，在使用零矩方法设计小波系统时，要很细心. 设计是不唯一的，并且有时一个比另外一个好.

表6-4包括由Daubechies设计的长度为6与12和由Tian设计的长度为8的尺度函数系数和小波系数，以及它们的离散矩. 我们看到，长度为6与12的额外尺度函数零矩，还有长度为8与12的在一个非零矩以后出现的额外的零矩.

90

连续矩可以由离散矩与低阶连续矩使用(6.9)与(6.10)计算[BCR91, GB92b, SP93]. 对于一个具有$K-1$个小波零矩的系统，离散矩的一个重要关系是由计算$h(n)$的离散时间傅里叶变换的模平方的导数建立的，$h(n)$的离散时间傅里叶变换是$H(\omega)=\sum_n h(n)e^{-i\omega n}$，且在$\omega=0$有模平方的$2K-1$个零导数. 这对于$K$是偶数且$1<k<2K-1$，给出[GB92b]$k$阶导数

$$\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}(-1)^{\ell}\mu(\ell)\mu(k-\ell)=0. \tag{6.46}$$

借助于低阶离散矩解$\mu(k)$，并且使用$\mu(0)=\sqrt{2}$，对于偶数K，给出

$$\mu(k)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{\ell=1}^{k-1}\binom{k}{\ell}(-1)^{\ell}\mu(\ell)\mu(k-\ell), \tag{6.47}$$

这允许借助于低奇阶离散尺度函数矩，对于$k=2, 4, \cdots, 2K-2$，计算偶阶离散尺度函数矩. 例如：

$$\mu(2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mu^2(1), \tag{6.48}$$

$$\mu(4)=\frac{1}{2\sqrt{2}}[8\mu(1)\mu(3)-3\mu^4(1)], \tag{6.49}$$

这可以由表6-2中的值看到.

Johnson[JMNK96]从Beylkin[Bey92]和Unser[Uns96]使用尺度函数的自相关函数矩注

意到，如果 K-1 个小波矩是零，那么连续的尺度函数矩的一种关系可以表示为

$$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}(-1)^{k-\ell}m(\ell)m(k-\ell)=0, \tag{6.50}$$

其中 $0<k<2K$. 借助于低阶矩解 $m(k)$，对于偶数 K，给出

$$m(k)=\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{k-1}\binom{k}{\ell}(-1)^{\ell}m(\ell)m(k-\ell), \tag{6.51}$$

这允许借助于低奇阶尺度函数矩，对于 $k=2, 4, \cdots, 2K-2$，计算偶阶尺度函数矩．例如[JMNK96]：

$$m(2)=m^2(1) \tag{6.52}$$

$$m(4)=4m(3)m(1)-3m^4(1) \tag{6.53}$$

$$m(6)=6m(5)m(1)+10m^2(3)+60m(3)m^3(1)+45m^6(1) \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}m(8)=&8m(7)m(1)+56m(5)m(3)-168m(5)m^3(1)\\&+2520m(3)m^5(1)-840m(3)m^2(1)-1575m^8(1)\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

91

如果小波矩直到 $k=K-1$ 是零．注意，如果足够的小波矩是零，那么设置 $m(1)=m(3)=0$，将会使得 $m(2)=m(4)=m(6)=m(8)=0$．这解释了在表 6-4 中的额外的零矩．它还表明，尺度函数零矩的传统要求是冗余的．在表 6-4 中，如果更多的小波矩是零，那么 $m(8)$ 是零．

表 6-4 Coiflet 尺度函数系数与小波系数和它们的离散矩

	长度 $N=6$，	阶数 $L=2$			
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
-2	-0.07273261951285	0.01565572813546	1.414213	0	0
-1	0.33789766245781	-0.07273261951285	0	0	1
0	0.85257202021226	-0.38486484686420	0	-1.163722	2
1	0.38486484686420	0.85257202021226	-0.375737	-3.866903	3
2	-0.07273261951285	-0.33789766245781	-2.872795	-10.267374	4
3	-0.01565572813546	-0.07273261951285			
	长度 $N=8$，	阶数 $L=3$			
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
-4	0.04687500000000	0.01565572813546	1.414213	0	0
-3	-0.02116013576461	-0.07273261951285	0	0	1
-2	-0.14062500000000	-0.38486484686420	0	0	2
-1	0.43848040729385	1.38486484686420	-2.994111	0.187868	3
0	1.38486484686420	-0.43848040729385	0	11.976447	4
1	0.38486484686420	-0.14062500000000	-45.851020	-43.972332	5
2	-0.07273261951285	0.02116013576461	63.639610	271.348747	6
3	-0.01565572813546	0.04687500000000			

（续）

	长度 $N=12$，	阶数 $L=4$			
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
-4	0.016387336463	0.000720549446	1.414213	0	0
-3	-0.041464936781	0.001823208870	0	0	1
-2	-0.067372554722	-0.005611434819	0	0	2
-1	0.386110066823	-0.023680171946	0	0	3
0	0.812723635449	0.059434418646	0	11.18525	4
1	0.417005184423	0.076488599078	-5.911352	175.86964	5
2	-0.076488599078	-0.417005184423	0	1795.33634	6
3	-0.059434418646	-0.812723635449	-586.341304	15230.54650	7
4	0.023680171946	-0.386110066823	3096.310009	117752.68833	8
5	0.005611434819	0.067372554722			
6	-0.001823208870	0.041464936781			
7	-0.000720549446	-0.016387336463			

对于这些系统，为看到连续尺度函数矩和小波矩，表6-5展示了长度为6与长度为8的Coiflet系统的连续矩和离散矩．注意，对于长度8，零矩 $m(4)=\mu(4)=0$．长度为14，20与26的系统恰巧在第一个非零矩之后也有“额外的”尺度零矩．对于长度 $N=6\ell+2$ 的Coiflet系统，这总是发生的．

92

表6-5 Coiflet系统的离散矩和连续矩

	$N=6$，	$L=2$		
k	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	$m(k)$	$m_1(k)$
0	1.4142135623	0	1.0000000000	0
1	0	0	0	0
2	0	-1.1637219122	0	-0.2057189138
3	-0.3757374752	-3.8669032118	-0.0379552166	-0.3417891854
4	-2.8727952940	-10.2673737288	-0.1354248688	-0.4537580992
5	-3.7573747525	-28.0624304008	-0.0857053279	-0.6103378310
	$N=8$，	$L=3$		
k	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	$m(k)$	$m_1(k)$
0	1.4142135623	0	1.0000000000	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	-2.9941117777	0.1878687376	-0.3024509630	0.0166054072
4	0	11.9764471108	0	0.5292891854
5	-45.8510203537	-43.9723329775	-1.0458570134	-0.9716604635

图6-7给出了长度为6，8，10与12的Coiflet尺度函数 $\varphi(t)$ 和小波 $\psi(t)$．注意，它们接近对称，这相当于Daubechies的经典小波系统，且使用不同的因子化方法可以得到更对称的一个小波系统，这种因子化方法6.3节中已涉及并在[Dau92]中证明了．这些系统与

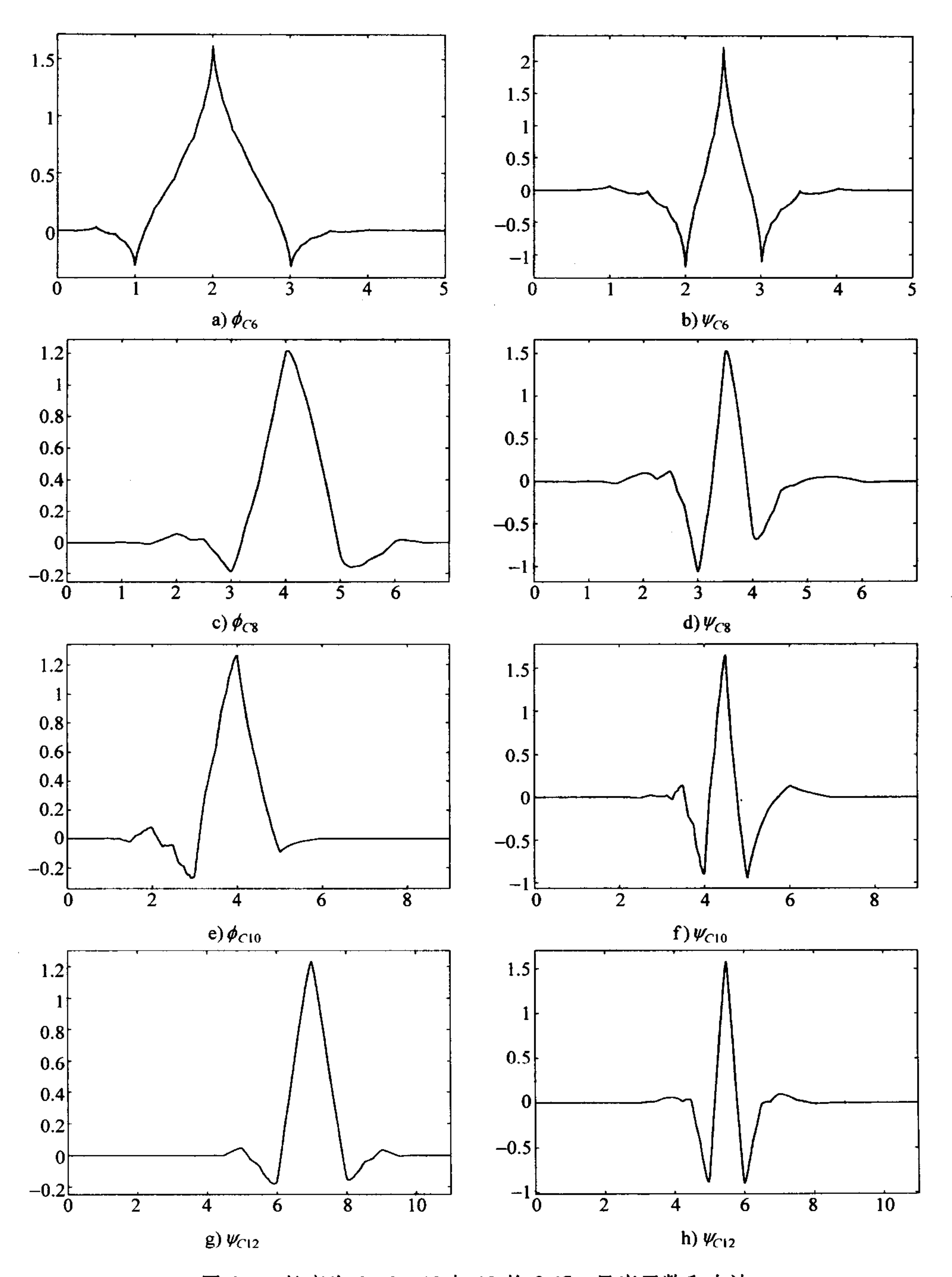


图 6-7　长度为 6，8，10 与 12 的 Coiflet 尺度函数和小波

真正的对称系统之间的差别(这实际上要求去掉正交性或紧支撑)或许在许多应用中可以忽略.

广义的 Coifman 小波系统

前节说明，Coifman 系统不必具有相等数目的尺度函数零矩与小波零矩．长度 $N=6\ell+2$ 具有相等数目的尺度函数零矩与小波零矩，但是在第一个非零矩之后的位置，总具有偶阶“额外”的尺度函数零矩．长度 $N=6\ell$ 总具有一个“额外”的尺度函数零矩．事实上，作为(6.52)到(6.55)描述的关系的结果，对于比较长的 N，都具有若干偶阶“额外的”零矩．长度 $N=6\ell-2$，对于 Coifman 原来的定义，这种现象不出现．如果推广 Coifman 系统的研究，考虑尺度函数零矩与小波零矩的个数近似相等的系统，则对所有的长度这都可能出现，并且可得到更大类 Coiflet.

考虑一般的 Coifman 小波系统，与在(6.40)与(6.41)中表示的系统相同，但是允许尺度函数零矩和小波零矩的数目至多有一个不同[BO96，BO97]．这包括所有现有的 Coiflet 以及长度为 10，16，22，和 $N=6\ell-2$ 的．长度为 10 的是由 Odegard[BO96]设计的，他设置尺度函数零矩的数目为 3 和小波零矩的数目为 2，而不是对于长度 8 设置零矩的数目是 2 和 2，或对于长度 12 设置零矩的数目是 3 和 3. 表 6-6 中的结果表明，长度 10 的设计再次给出一个额外的尺度函数零矩，这比小波零矩的数目多两个．这是(6.53)预示的偶阶矩，并且像我们期望的那样，得到的零矩的总数在长度为 8 与长度为 12 的零矩的总数之间．类似的方法也用于设计长度为 16，22 和 28.

93～94

表 6-6 广义 Coiflet 尺度函数和小波系数及它们的离散矩

	长度 $N=4$,	阶数 $L=1$			
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
-1	0.224143868042	0.129409522551	1.414213	0	0
0	0.836516303737	0.482962913144	0	-0.517638	1
1	0.482962913144	-0.836516303737	0.189468	0.189468	2
2	-0.129409522551	0.224143868042	-0.776457	0.827225	3
	长度 $N=10$,	阶数 $L=3$			
n	$h(n)$	$h_1(n)$	$\mu(k)$	$\mu_1(k)$	k
-2	0.032128481856	0.000233764788	1.414213	0	0
-1	-0.075539271956	-0.000549618934	0	0	1
0	-0.096935064502	-0.013550370057	0	0	2
1	0.491549094027	0.033777338659	0	3.031570	3
2	0.805141083557	0.304413564385	0	24.674674	4
3	0.304413564385	-0.805141083557	-14.709025	138.980052	5
4	-0.033777338659	0.491549094027	64.986095	710.373341	6
5	-0.013550370057	0.096935064502			
6	0.000549618934	-0.075539271956			
7	0.000233764788	0.032128481856			

我们使用约束优化函数的 MATLAB 最优化工具箱，设计这些“新” Coiflet 系统(例如 $N=10$, 16, 22, 28). Wells 和 Tian[TW95]使用牛顿法设计长度为 $N=6\ell+2$ 和 $N=6\ell$ 的 Coiflet 系统直到长度为 30[BO96]. Selesnick[SOB96]使用了一种滤波器设计方法．另一种滤波器设计方法由 Wei 和 Bovik[WB96]给出．

表 6-6 还给出设计的一个长度为 4 的系统的结果，使用一个自由度，寻找一个尺度函数零矩，而不是像我们对于 Daubechies 系统所做的寻找一个小波零矩．对于长度 4，我们没有得到任何“额外”的零矩，因为没有足够的小波零矩．这里，我们看到在尺度函数零矩与小波零矩之间的一种直接调整．对传统的 Coiflet，添加这些新的长度给出表 6-7.

表 6-7 不同长度 N 和阶数 L 的广义 Coiflet 的矩，其中(*)是除 $m_1(0)=0$ 以外零小波矩的数目

N	L	$m=0$ 调整值	$m_1=0$ 调整值*	$m=0$ 实际值	$m_1=0$ 实际值*	全部零矩	赫尔德指数
4	1	1	0	1	0	1	0.2075
6	2	1	1	2	1	3	1.0137
8	3	2	2	2	2	4	1.3887
10	3	3	2	4	2	6	1.0909
12	4	3	3	4	3	7	1.9294
14	5	4	4	4	4	8	1.7353
16	5	5	4	6	4	10	1.5558
18	6	5	5	6	5	11	2.1859
20	7	6	6	6	6	12	2.8531
22	7	7	6	8	6	14	2.5190
24	8	7	7	8	7	15	2.8300
26	9	8	8	8	8	16	3.4404
28	9	9	8	10	8	18	2.9734
30	10	9	9	10	9	19	3.4083

在表 6-7 中的第 4 列和第 6 列包含除 $m_1(0)=0$ 以外的小波零矩的数目，$m_1(0)$为零是因为所有这些系统是正交的．对于 $N=6\ell+2$，在一个非零矩之后出现的额外尺度函数零矩也不包括在这个数目之中．这个表对于所有偶数长度展示了广义 Coiflet. 这表明，有时达到的额外的尺度函数零矩，与零矩总数目的单调增性以及用赫尔德指数度量的“光滑性”[Rio93b, LH96, HW96a]随着 N 与 L 的增长而增加．

当尺度函数矩和小波矩都设置为零时，一个比较大的数目可以由可利用的自由度得到. 像前面表明的，N 个可利用的自由度可由 N 个系数 $h(n)$确定，一个自由度用于通过线性约束(6.1)保证 $\varphi(t)$的存在性，$N/2$个自由度用于通过二次约束(6.1)保证正交性，其余的$N/2-1$ 个自由度保证其他的特征．Daubechies 使用这些设置前$N/2-1$ 个小波矩为零．由这种方法，我们想到 Coiflet 系统将$(N/2-1)/2$个小波矩设置为零，并且将同样数目的尺度函数矩设置为零．对于表 6-7 中描述的 Coiflet 系统和广义 Coiflet 系统，我们实际得到的总比表中描述的多．这个问题的结构允许设置和达到的零矩比自由度预测的多．事实上，Coiflet 系统达到总数大约$2N/3$个零矩，Daubechies 小波系统达到自由度的数目大约

是$N/2$.

正如前面注意到的和在表6-8中描述的，这些广义Coiflet分为三类．尺度滤波器长度$N=6\ell+2$的一类(属于Tian)具有相等数目的尺度函数零矩和小波零矩，但是在第一个非零矩位置之后总有“额外”的尺度函数零矩．长度$N=6\ell$的一类(属于Daubechies)尺度函数零矩总比小波零矩多一个，而长度$N=6\ell-2$的一类(新的一类)尺度函数零矩总比小波零矩多两个．这些“额外”的零矩是由(6.52)到(6.55)预示的，并且对于比较长的长度有额外的偶阶零矩．我们已经注意到了，在这些类的每一类中，赫尔德指数单调增加．

表6-8　三类广义Coiflet系统($\ell=0, 1, 2, \cdots$)的零矩的数目，
***排除$\mu_1(0)=0$，†排除非邻接的零**

N长度	$m=0^{\dagger}$达到	$m_1=0^{*}$达到	全部零矩
$N=6\ell+2$	$(N-2)/3$	$(N-2)/3$	$(2/3)(N-2)$
$N=6\ell$	$N/3$	$(N-3)/3$	$(2/3)(N-3/2)$
$N=6\ell-2$	$(N+2)/3$	$(N-4)/3$	$(2/3)(N-1)$

早期的研究者没有给出长度$N=6\ell-2$时的结果，因为它们与长度仅短2的系统有相同的Coiflet. 然而，它们达到的尺度函数零矩比具有同样次数的长度比较短的系统多两个．

表6-7是具有很多样调整的一大类零矩小波系统设计的开始，这样的调整将适合特定的应用．除了这里描述的多样性外，这些特殊的零矩集合的一些(或许全部)具有多重解．像(6.42)到(6.45)中描述的，这对于长度6当然成立，并且对于其他的长度，我们实验上已经求得．对于每个长度，各种解可以有不同的位移、不同的赫尔德指数以及不同的近似对称的次数．

本章节的结果表明矩对于尺度函数和小波的特征的重要性．然而，对于使用Daubechies或Coifman精确准则，这或许是不必要的或不重要的，但是了解零矩的有效性是很重要的．这可以设置少数尺度函数矩和小波矩，剩下的自由度可以足以用于一些另外的在频域或时域中的最优化．正如在下节注意到的，一种应可能是极小化一个比较大数目的各种矩，而不是使少数矩变为零[OB96a].

广义Coiflet系统的例子如图6-7所示．

6.10　矩的极小化而不是零矩

Odegard考虑一个比较大数目的矩极小化的情形，而不是设置$N/2-1$个矩等于零[OB97, OB96b, OB96a]. 这个结果在表示或逼近比较大的一类信号中有一些改进，它以牺牲一小类比较好的逼近为代价．事实上，Götze[GORB96]证明了，甚至在设计的零矩小波系统中，系统在有限精度算法中的实现导致非零矩，且在某些情形下得到非正交的系统．

95 ~ 97

第7章　基本多分辨小波系统的推广

直到现在，本书已详细地讨论了基本的2带小波系统，给出了对这个新的数学工具一些深入而直观的理解．本章将叙述对基本系统的各种有价值的推广，但没有给出其中的细节．我们希望本书前面给出的细节可以传递到这些推广上，并且与参考文献一起对这些主题提供一个导引．

7.1　花砖时-频或时间-尺度平面

从性质上说，描述一个信号使用小波系统或小波变换的分解表示组成根据在(1.5)中定义的指标 k 与 j 划分的时间-尺度平面*花砖*(tile)．根据帕塞瓦尔定理，这对于正交基(或紧框架)是可能的．事实上，帕塞瓦尔定理指出，信号能量可以在时间-尺度平面上划分．花砖的形状和位置表明使用基小波划分的对数性质，以及 M 带系统或小波包如何修改基本图像．同时还表明，时间改变或平移改变的小波系统的有效性，与 M 带系统和小波包，可以给出几乎任意的平面划分．

一个信号的能量可以用(2.36)或(4.24)中的帕塞瓦尔关系借助于离散小波变换给出．这个公式表明能量是平移指标 k 和尺度指标 j 的一个函数，

$$\int |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c(l)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d(j,k)|^2. \tag{7.1}$$

小波变换可以分析一个信号，或者得到信号的参数化，这个信号能够在测不准原理约束下，在时间和尺度(或频率)两个域上局部化能量．语言分析中使用的谱图，是使用短时傅里叶变换同时在时域和频域中描述语言的一个例子．

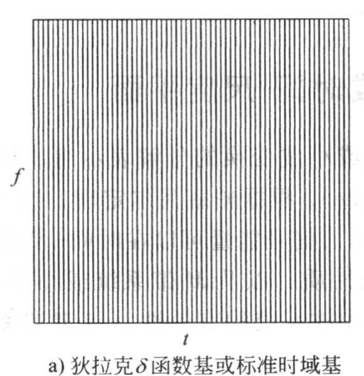
在一个信号中，使用花砖能量划分的这个图形或视觉描述依赖于系统的结构，而不依赖于系统的参数．换句话说，花砖划分依赖于是使用 $M=2$ 还是 $M=3$，是使用小波包还是时间改变小波，或者是否使用超完全框架系统．它不依赖于特定的系数 $h(n)$ 或 $h_i(n)$、系数数目 N 或零矩数．虽然花砖看起来好像指标 j，k 的连续变量，但是它们不是．能量实际上是离散小波变换域中的离散变量的一个函数，并且花砖的边界是划分的象征．当像7.8节中描述的那样使用连续小波变换时，这些边界变得更字面化，但这并不意味着划分能量完全限制于花砖．

98

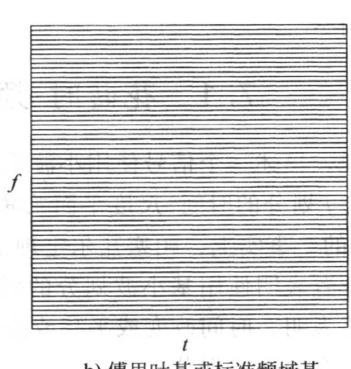
7.1.1　非稳定信号分析

在许多应用中，我们借助于基函数研究信号的分解．例如，使用傅里叶变换，将稳定信号分解为傅里叶基．对于非稳定信号(即频率特征是时变的信号，例如，音乐、语言、图像等)，傅里叶基是不适合的，因为它对时间局部化是不好的．对于这类问题典型的解

决方法是使用短时(或者窗口)傅里叶变换(STFT). 然而，短时傅里叶变换存在若干问题，最严重的是基函数的固定时-频分辨. 小波技巧给出一类新的(潜在的信号依赖的)基，它有所需的时-频分辨性质."最优"分解依赖于研究的信号(或信号类). 然而，所有经典的时-频分解(像离散短时傅里叶变换，DSTFT)是信号不依赖的. 一组基中的每个函数可以示意地(schematically)考虑为时-频平面内的花砖，其中它的大多数能量是集中的. 基函数的正交性可以用非重叠花砖示意地捕获. 在这个假设下，对于标准基(即 δ 基)和傅里叶基(即正弦基)时-频砖如图 7-1 所示.



a) 狄拉克δ函数基或标准时域基



b) 傅里叶基或标准频域基

99

图 7-1

7.1.2 具有离散时间的短时傅里叶变换的花砖

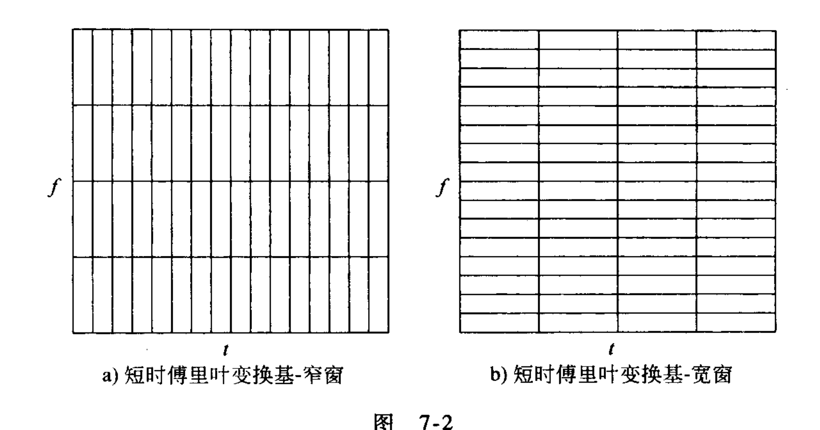
离散短时傅里叶变换基函数形如

$$w_{j,k}(t) = w(t - k\tau_0)\mathrm{e}^{-ij\omega_0 t}, \tag{7.2}$$

其中 $w(t)$ 是窗函数[Gab46]. 如果这些函数形成正交(规范正交)基，那么 $x(t) = \sum_{j,k}\langle x, w_{j,k}\rangle w_{j,k}(t)$. 离散短时傅里叶变换系数$\langle x, w_{j,k}\rangle$，估计提供在时-频平面上以$(k\tau_0, j\omega_0)$为中心的信号分量，即离散短时傅里叶变换给出具有基函数$\{w_{j,k}(t)\}$的时-频平面的一个均匀花砖. 如果 Δ_t 和 Δ_ω 分别是 $w(t)$的时间分辨和频率分辨，那么，测不准原理要求$\Delta_t\Delta_\omega \leqslant 1/2$[Dau90, Sie86]. 进而，如果基是规范正交的，那么 Balian-Low 定理推出或者 Δ_t 或者 Δ_ω 是无限的. Δ_t 和 Δ_ω 都可以用选择 $w(t)$来控制，但是，对于任一特定的选择，存在这样的信号，对此信号，或者时间分辨不适用，或者频率分辨不适用. 图 7-2 给出了对于一个窄的窗和一个宽的窗相应于短时傅里叶变换基的时-频花砖，表明相应于这组基的固有的时-频折衷. 注意，此花砖示意对于窗的若干选择成立(即每个图表示所有具有特定时-频分辨特征的离散短时傅里叶变换基).

7.1.3 具有离散 2 带小波变换的花砖

离散小波变换是另一个信号不依赖的时-频平面的花砖，这个时-频平面适合于信号，



a) 短时傅里叶变换基-窄窗　　b) 短时傅里叶变换基-宽窗

图 7-2

其中高频信号分量具有比低频信号分量短的区间．离散小波变换时-频原子$\{\psi_{j,k}(t)\}=\{2^{j/2}\psi(2^jt-k)\}$是由小波函数$\psi(t)$的平移和伸缩得到的．我们收缩/伸展小波以捕获信号的高/低频分量．如果这些原子形成一组规范正交基，那么$x(t)=\sum_{j,k}\langle x,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(t)$．离散小波变换系数$\langle x,\ \psi_{j,k}\rangle$，是时-频平面中位于$(2^{-j}k,\ 2^j)$的信号分量能量的度量，这还给出另一个时-频平面的花砖．正如第 3 章和第 8 章中讨论的，（对于紧支撑的小波）离散小波变换可以使用 2 带酉有限脉冲响应滤波器组有效地计算[Dau88a]．图 7-3 表示相应的花砖描述，这描绘了一组离散小波变换基的时-频分辨性质．如果你在某个特定的时间(平移)沿频率(或尺度)轴看，那么你能看到如图 3-5 所示具有每个带的对数带宽的滤波器组的频率响应．事实上，在图 7-3 的花砖中，每个水平的窄条相应于每个带，进而相应于一个尺度 j. 相应于每个系数的花砖的位置如图 7-4 所示．如果在一个特定的尺度，沿 k 轴平移，那么可以在这个尺度上构造一个信号分量．显然，在较低的分辨(较小的 j)上平移是大的，而在较高的分辨上平移是小的．

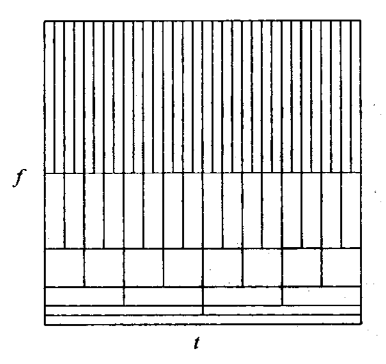


图 7-3　2 带小波基

对于了解离散小波变换的性质和分析信号，时-频平面花砖是一种很有效的图示方法．例如，如果分析的信号单小波本身，形如

$$f(t)=\psi(4t-2), \tag{7.3}$$

那么离散小波变换将只有一个非零系数 $d_2(2)$．为看到离散小波变换不是时间(或平移)不变的，设平移 $f(t)$ 某个非整数数量，则将看到离散小波变换发生很大变化．如果平移是某个整数，那么在每个尺度上能量保持相同，但它更多地沿着 k 值"扩展"且每个尺度上的扩展不同．如果平移不是一个整数，那么能量在 j 与 k 中都扩展了．如果允许任意平移，

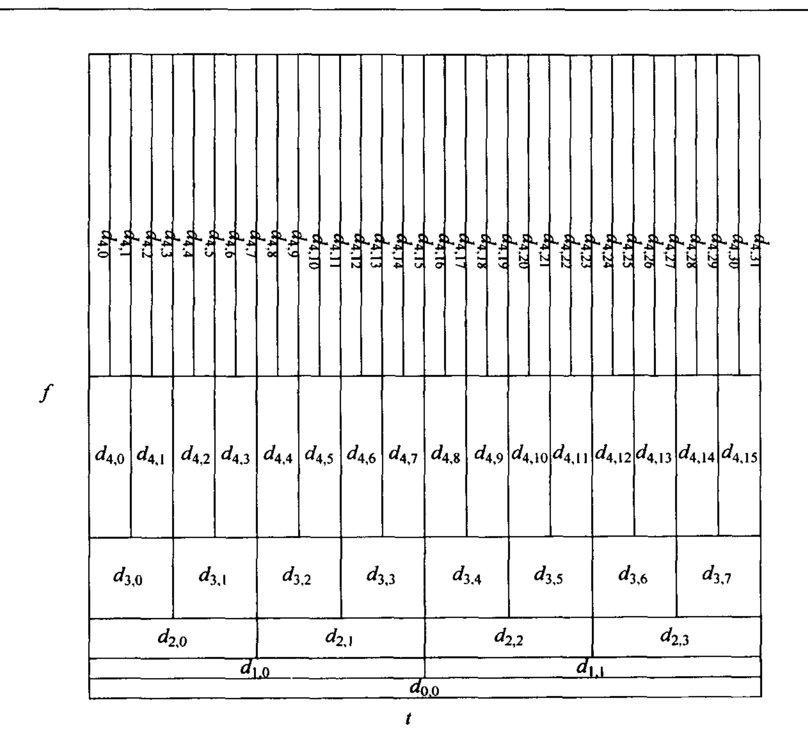


图 7-4　离散小波变换的系数和花砖的关系

那么没有这样的花砖作为一个“尺度有限”信号相应一个带限(傅里叶)信号．对于整数平移，有相应的概念[GOB94].

7.1.4　一般化花砖

注意，对于一般的非稳定信号分析，我们希望控制时-频平面花砖的方法，不仅使用上述两种特殊情形(它们的重要性不管)．得到规范正交小波 ψ 的另一种方法是使用酉有限脉冲响应滤波器组理论．这主要用于 M 带离散小波变换、小波包以及时变小波变换，它们分别在 7.2 节和 7.3 节以及第 8 章中讨论．

花砖表示平移和尺度变化的相关大小．它们没有完全地把划分的能量限制于花砖．具有类似花砖的表示可以有很不同的特性．

7.2　重数 M(M 带)尺度函数和小波

100 ≀ 102

当在(5.1)或(7.4)中使用重数 M 为 2 时，它适合许多问题，与倍频程概念相一致，给出 Mallat 快速算法的一棵二叉树，并且给出常数 Q 频带宽或对数频带宽，在更一般的情形下可以陈述和证明 5.8 节中给出的条件，其中基本的尺度方程(5.1)使用一般的尺度因子或重数 M，而不是特殊的 2 倍值 $M=2$[ZT92b，ZT92a，GB92c，SHGB93，Hel95，

GOB92，Vai87b]. 对于较大的 M，希望得到一个比由 $M=2$ 的小波或短时傅里叶变换得到的更有伸缩性时-频平面的花砖. 还希望得到均匀带宽的某个区域而不是由图 3-5 中描述的频率响应的对数间隔. 对于较大的 M 的动因还来自于第 8 章中讨论的滤波器组理论。

我们给出更一般的多分辨公式，其中(5.1)变成

$$\varphi(x)=\sum_n h(n)\sqrt{M}\varphi(Mx-n). \tag{7.4}$$

在某些情形中，M 可以是有理数，然而，在大多数情形中，它一定是整数，并且在(5.1)中，要求它是 2. 在频域中，这个关系变成

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{M}}H(\omega/M)\Phi(\omega/M), \tag{7.5}$$

并且，迭代后的极限是

$$\Phi(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{M}}H\left(\frac{\omega}{M^k}\right)\right\}\Phi(0), \tag{7.6}$$

假定乘积收敛并且 $\Phi(0)$ 有定义. 这是(5.52)的一般化形式，并且在(5.74)中得到.

7.2.1 M 带小波系统的性质

这些定理、关系和性质是第 5 章 5.8 节中给出的相应结果的推广，而第 5 章 5.8 节的这些结果的一些简要证明或推导在附录中给出. 对于重数 M 问题，如果尺度函数与小波以及它们各自的系数是有限的，并且系统是正交的或是一个紧框架，那么尺度函数向量或滤波器 $h(n)$ 的长度是重数 M 的一个倍数，即 $N=MG$，其中 Resnikoff 和 Wells [RW97] 称 M 是系统的秩，而称 G 是种.

式(5.10)、(5.14)、(5.16)和(5.17)的结果变成

定理 28 如果 $\varphi(t)$ 是(7.4)的一个 L^1 解，并且 $\int\varphi(t)\,\mathrm{d}t\neq 0$，那么

$$\sum_n h(n)=\sqrt{M}. \tag{7.7}$$

这是在(5.10)中重数 2 的基本结果的一种推广，并且不依赖 $\varphi(t)$ 的任何特殊的规范化或正交性.

定理 29 如果(7.4)的解的整数平移是正交的，那么

$$\sum_n h(n+Mm)h(n)=\delta(m). \tag{7.8}$$

103

这是(5.14)的推广，并且不依赖于任何的规范化. 这个定理的一个有用的推论是

推论 3 如果(7.4)的解的整数平移是正交的，那么

$$\sum_n |h(n)|^2=1. \tag{7.9}$$

这个定理的第二个推论是

推论 4 如果(7.4)的解的整数平移是正交的，那么

$$\sum_n h(Mn+m)=1/\sqrt{M}.\quad m\in\mathbf{Z} \tag{7.10}$$

像对于 $M=2$ 情形所讨论的，在比正交性弱的条件下，这也成立.

使用傅里叶变换，可以得到下述关系：

定理 30 如果 $\varphi(t)$ 是(7.4)的一个 L^1 解，并且 $\int\varphi(t)\mathrm{d}t\neq 0$，那么

$$H(0)=\sqrt{M}, \tag{7.11}$$

这是频域存在条件.

定理 31 (7.4)的解的整数平移是正交的当且仅当

$$\sum_{\ell}|\Phi(\omega+2\pi\ell)|^2=1. \tag{7.12}$$

定理 32 如果 $\varphi(t)$ 是(7.4)的一个 L^1 解，并且 $\int\varphi(t)\mathrm{d}t\neq 0$，那么

$$\sum_n h(n+Mm)h(n)=\delta(m), \tag{7.13}$$

当且仅当

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+2\pi/M)|^2+|H(\omega+4\pi/M)|^2+\cdots+|H(\omega+2\pi(M-1)/M)|^2=M. \tag{7.14}$$

这是关于 $h(n)$ 的一个频域正交性条件.

推论 5

$$H(2\pi\ell/M)=0,\quad \text{对于}\quad \ell=1,2,\cdots,M-1. \tag{7.15}$$

这是指明尺度滤波器频率响应 $H(\omega)$ 的零点位置的(5.20)的一般化形式. 这是对 $H(z)$ 的某些零点恰好所在的位置的一个约束.

104

定理 33 如果 $\sum_n h(n)=\sqrt{M}$，并且 $h(n)$ 具有有限支撑或者足够快地衰减，那么满足(7.4)的 $\varphi(t)\in L^2$ 存在且唯一.

定理 34 如果 $\sum_n h(n)=\sqrt{M}$，并且 $\sum_n h(n)h(n-Mk)=\delta(k)$，那么 $\varphi(t)$ 存在、可积，并且生成一个小波系统，这个小波系统是 L^2 中的紧框架.

这些结果是本书前面章节讨论的基本的 $M=2$ 小波系统的有效推广. 这些更一般的尺度函数的定义、性质和产生，与 $M=2$ 的情形具有同样的形式，但是不再有相应于尺度函数的一个小波，而有 $M-1$ 个小波. 现在，除(7.4)之外，我们有 $M-1$ 个小波方程，这些方程表示为

$$\psi_{\ell}(t)=\sum_n\sqrt{M}h_{\ell}(n)\varphi(Mt-n), \tag{7.16}$$

对于

$$\ell=1,2,\cdots,M-1$$

成立. 有些作者记 $h(n)$ 为 $h_0(n)$，且记 $\varphi(t)$ 为 $\psi_0(t)$，以便 $h_{\ell}(n)$ 表示尺度函数的系数和所有小波的系数，并且 $\psi_{\ell}(t)$ 表示尺度函数和所有小波.

正如 $M=2$ 的情形，M 带尺度函数和尺度系数是唯一的，并且仅是基本递推方程或加

细方程(7.4)的解．然而，小波和小波系数不再是唯一的或者一般是容易设计的．

我们现在有了具有 M 带尺度函数与小波的更一般和更灵活的多分辨展开系统的可能．可以在每个尺度 j 上用 $M-1$ 个小波张成的 $M-1$ 个信号空间．它们对于 $\ell=1, 2, \cdots, M-1$ 表示为

$$\mathcal{W}_{\ell,j} = \underset{k}{\mathrm{Span}}\{\psi_\ell(M^j t + k)\} \tag{7.17}$$

例如，对于 $M=4$，

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_{1,0} \oplus \mathcal{W}_{2,0} \oplus \mathcal{W}_{3,0} \tag{7.18}$$

和

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}_{1,1} \oplus \mathcal{W}_{2,1} \oplus \mathcal{W}_{3,1} \tag{7.19}$$

或者

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_{1,0} \oplus \mathcal{W}_{2,0} \oplus \mathcal{W}_{3,0} \oplus \mathcal{W}_{1,1} \oplus \mathcal{W}_{2,1} \oplus \mathcal{W}_{3,1}. \tag{7.20}$$

当 $j\to\infty$ 取极限时，有

$$L^2 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_{1,0} \oplus \mathcal{W}_{2,0} \oplus \mathcal{W}_{3,0} \oplus \mathcal{W}_{1,1} \oplus \mathcal{W}_{2,1} \oplus \mathcal{W}_{3,1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_{3,\infty}. \tag{7.21}$$

对于在第 2 章中的 $M=2$，这里的记号是 $\mathcal{W}_{1,j}=\mathcal{W}_j$.

这如图 7-5 所示，其中嵌套的尺度函数空间 $\mathcal{V}_j$，而每个环形区域现在分成 $M-1$ 个子空间，在指定尺度上每个子空间由 $M-1$ 个小波张成．比较图 7-5 与经典情形 $M=2$ 的图 2-3.

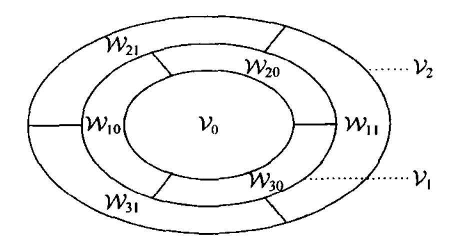


图 7-5 对于 4 带小波系统 $\mathcal{W}_{\ell j}$ 的向量空间分解

一个信号或函数借助于 M 带小波的展开包含 ℓ，j 与 k 上的三重和，

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k c(k)\varphi_k(t) \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{M-1} M^{j/2} d_{\ell,j}(k)\psi_\ell(M^j t - k), \end{aligned} \tag{7.22}$$

其中展开系数(离散小波变换)用

$$c(k) = \int f(t)\varphi(t-k)\,\mathrm{d}t \tag{7.23}$$

和

$$d_{\ell,j}(k) = \int f(t) M^{j/2}\psi_\ell(M^j t - k)\,\mathrm{d}t. \tag{7.24}$$

求得．现在我们有了 M 带离散小波变换．

定理 35 如果尺度函数 $\varphi(t)$ 满足存在性与正交性条件，小波由(7.16)定义，并且如果这些小波的整数平移张成 $\mathcal{V}_0$ 的正交补 $\mathcal{W}_{\ell,0}$，所有 $\mathcal{W}_{\ell,0}$ 都属于 $\mathcal{V}_1$，即在同样的尺度上，小波正交于尺度函数，即如果

$$\int \varphi(t-n)\psi_\ell(t-m)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{7.25}$$

对于 $\ell=1, 2, \cdots, M-1$ 成立，那么

$$\sum_n h(n)h_\ell(n-Mk)=0, \tag{7.26}$$

对于所有整数 k 和 $\ell=1, 2, \cdots, M-1$ 成立.

结合(7.8)与(7.26)，并且由 $h_0(n)=h(n)$ 给出

105 ≀ 106

$$\sum_n h_m(n)h_\ell(n-Mk)=\delta(k)\delta(m-\ell) \tag{7.27}$$

作为一个正交系统在 $h_\ell(n)$ 上的必要条件.

与 $M=2$ 的情形不同，对于 $M>2$，没有 $h_\ell(n)$ 的公式，并且对于一个给定的尺度函数存在许多可能的小波.

Mallat 算法具有如图 7-6 所示的更复杂的形式. 这个系统的优点是更灵活，允许线性的和对数的时间-尺度平面花砖的混合. 消除分歧的一个有效工具是用"调制余弦"设计选择小波.

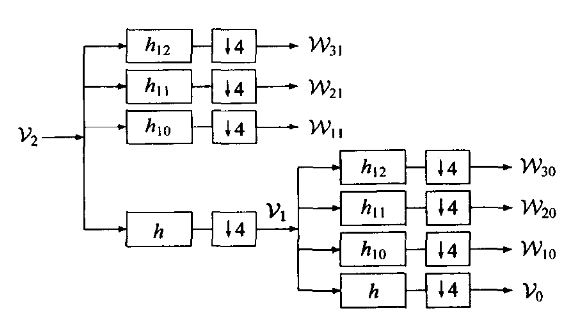


图 7-6 4 带小波系统 $\mathcal{W}_{\ell j}$ 的滤波器组结构

图 7-7 展示滤波器组的频率响应，与图 3-5 所示的 $M=2$ 的情形相同. 尺度函数与小波的例子在图 7-8 中给出，并且时间-尺度平面的花砖如图 7-9 所示. 图 7-9 表明了一个 4 带离散小波变换基的时-频分辨率特征. 注意，它与前面章节中给出的标准基、傅里叶变换基、离散短时傅里叶变换基和 2 带离散小波变换基不同. 它给出了对数频率分辨率与线性频率分辨率的一种混合.

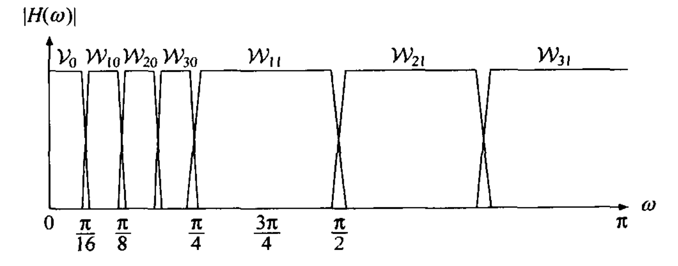


图 7-7 4 带滤波器组 $\mathcal{W}_{\ell j}$ 的频率响应

下面定义 $\psi_\ell(t)$ 的 k 阶矩为

$$m_\ell(k)=\int t^k\psi_\ell(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7.28}$$

并且 $h_\ell(n)$ 的 k 阶离散矩为

$$\mu_\ell(k)=\sum_n n^k h_\ell(n). \tag{7.29}$$

定理 36（K 正则 M 带滤波器的等价特征） 一个酉尺度滤波器是 K 正则的，当且仅当

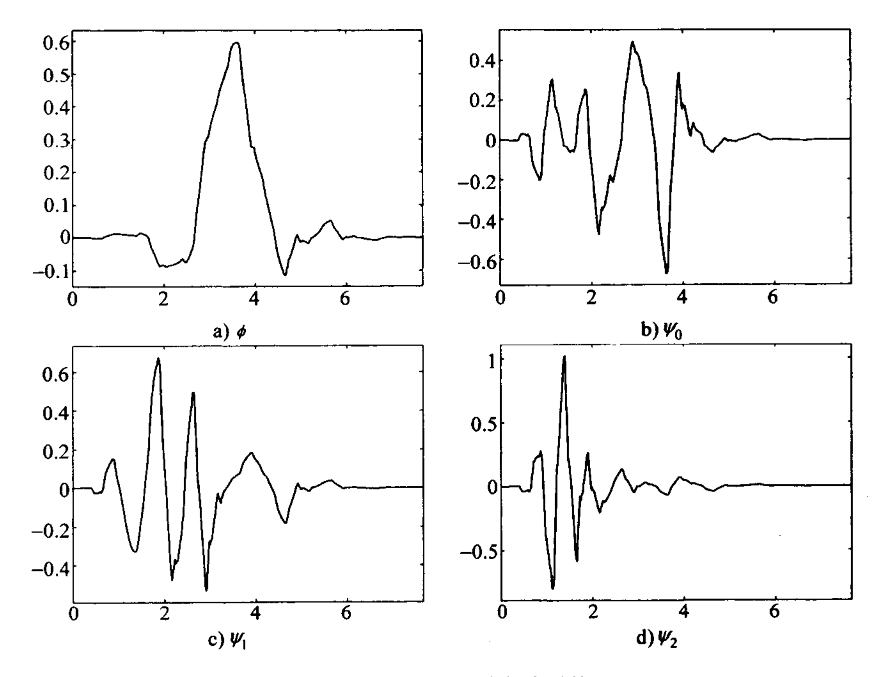


图 7-8 4 带 6 正则小波系统

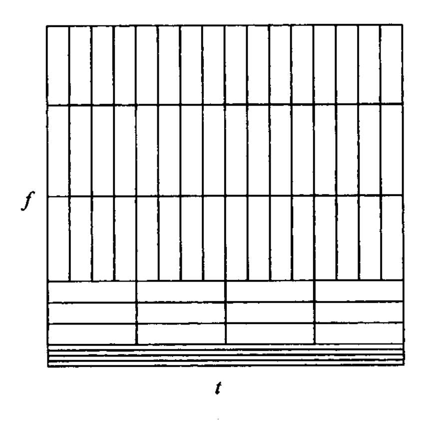


图 7-9 4 带小波基的花砖

下述等价叙述成立：

1. 所有小波滤波器的矩是零，即 $\mu_\ell(k)=0$，对于 $k=0, 1, \cdots, (K-1)$ 和 $\ell=1, 2, \cdots, (M-1)$ 成立.

2. 所有小波的矩是零，即 $m_\ell(k)=0$，对于 $k=0, 1, \cdots, (K-1)$ 和 $\ell=1, 2, \cdots, (M-1)$ 成立.

3. 对于 $k=0, 1, \cdots, (K-1)$，部分尺度滤波器的矩是相等的.

4. 尺度滤波器的频率响应在 M 次单位根 $\omega=2\pi\ell/M(\ell=1, 2, \cdots, M-1)$ 上有 K 阶零点.

5. 尺度滤波器的模平方频率响应在 $\omega=0$ 是 $2K$ 阶扁平的. 这由(5.22)得到.

6. 所有直到 $K-1$ 次的多项式可以表示为整数平移的尺度滤波器的一个线性组合.

7. 对所有 j，所有直到 $K-1$ 次的多项式可以表示为整数平移的尺度函数的一个线性组合.

这个结果[SHGB93, Hel95]类似于第 6 章中给出的 $M=2$ 情形的结果. 它不仅把零矩的数目与正则性联系起来，而且还与多项式的次数联系起来，这个多项式能用加权的和平

移的尺度函数的和精确表示．注意，$H(z)$的零点的位置围绕单位圆等距分布，将得到一个比 $M=2$ 的半带滤波器更窄的频率响应．这与(7.14)中给出的要求一致并且在图 7-7 中描述．

本节中的一些推导概要在附录中给出，或者是 $M=2$ 情形的简单推广．更详细地在[GB92c，SHGB93，Hel95]中给出．

7.2.2 *M* 带尺度函数设计

$\varphi(n)$的值可以用 5.10 节中给出的同样的方法计算．然而，尺度系数 $h(n)$的设计类似于 2 带情形的设计，但是稍微有些困难[Hel95].

107～109

一些特殊情形的证明是 2 带系统的一种简单推广．如果重数 $M=2^m$，那么尺度函数是 $M=2$ 情形的一个简单尺度变化，并且相应的一些特定的小波是由迭代 Mallat 算法树的小波分支得到的，这与 7.3 节中所描述的对小波包的做法相同．对于其他的 M 值，特别是奇数值，情况更复杂．

7.2.3 *M* 带小波设计和余弦调制方法

对于 $M>2$，小波系数 $h_\ell(n)$不像 $M=2$ 情形那样由尺度系数唯一决定．在设计特定系统中，它给我们更多的灵活性，从而使考虑的设计复杂化．对于小的 N 和 M，设计可以直接做到，但是对于比较长的 N 和/或比较大的 M，直接设计是不可能的，有些像第 8 章中描述的由尺度函数的小波余弦调制设计或许是最好的方法[KV92，Ngu92，NK92，Mal92，Mau92]，[OGB94，GB95c，GB92a，GB95b，GB93，NH96，RT91，Ngu94，Ngu95a].

7.3 小　波　包

经典的 $M=2$ 小波系统导致一个对数频率分辨．低的频率具有窄的带宽，而高的频率具有宽的带宽，如图 3-5 所示．这称为“常数 Q”滤波器，并且适合于某些应用，但不是所有应用．由 Ronald Coifman[Rus92，CW92]提出的小波包系统允许在高频上加细和可调整的频率分辨．这还给出了适应于特定信号或信号类的一个丰富的结构．这个结构的计算复杂性是 $O(N\log(N))$，这类似于快速傅里叶变换，不同于经典的小波变换的 $O(N)$.

7.3.1 完全小波包分解

为了生成一个在高频上允许比较高的分辨率分解的基系统，我们将既迭代(分裂并下抽样)Mallat 算法树的高通小波分支，又迭代低通尺度函数分支．对于离散小波变换，我们反复地分裂、滤波和抽取低通带．得到的三尺度分析树(三步滤波器组)如图 3-4 所示．这种类型的树导致带宽的对数分裂和时–频平面的花砖，如图 7-3 所示．

如果在所有步中分裂低通带和高通带，那么得到的滤波器组结构像图 7-10 中所示的一个完全二叉树．这个完全二叉树需要 $O(N\log N)$次计算，并且得到一个完全均匀距离的

频率分辨得到．事实上，它的结构有些类似于快速傅里叶变换算法．注意关于信号空间下标的意思．第一个整数下标是如图 7-11 中所描述的空间的尺度 j. 每个下一级的指标是 0 或 1，这依赖于选取通过图 3-4 中所示的滤波器组的路径．“0”表示通过一个低通滤波器(尺度函数分解)，“1”表示通过一个高通滤波器(小波分解)．这不同于 7.2 节中对于 $M>2$ 情形的约定．

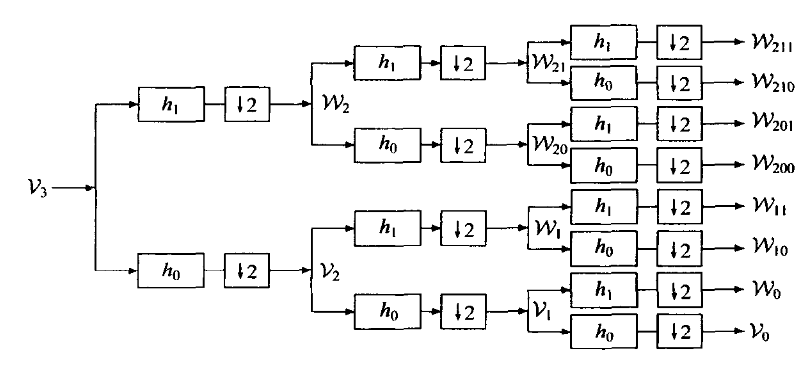


图 7-10　三尺度小波包变换的完全二叉树

图 7-11 给出了尺度函数和小波的信号向量空间的分解．图 7-12 给出了小波包滤波器组的频率响应，像 $M=2$ 的图 3-5 和 $M=3$ 的小波系统的图 7-7.

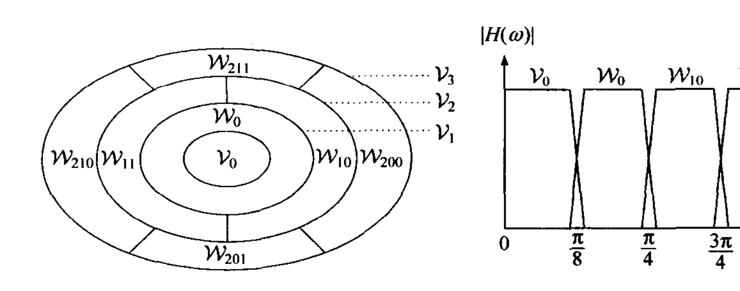


图 7-11　$M=2$ 的完全小波包系统的向量空间的分解

图 7-12　2 带小波包滤波器组的频率响应

图 7-14 给出哈尔小波包，这结束了从 2.8 节出发的例子．这是一个信息描述，表明什么是正则小波系统的“包”．应当与第 2 章末尾的例子进行比较．这类似于沃尔什–哈得曼(Walsh-Haddamar)分解，并且在图 7-13 给出了由 Daubechies $\phi_{D8'}$ 尺度函数生成的完全小波包系统．数字右上角的“小撇”表示这是具有选择的谱因子分解的 Daubechies 系统，这种选择使得一些零点在单位圆内，一些在单位圆外．这可能给出一个具有最大对称性的 Daubechies 系统．注意，三个小波具有递增的“频率”．它们有些像窗口的正弦波，因此命名小波包．比较具有 $M=2$ 和 $M=4$ 的 Daubechies 小波．

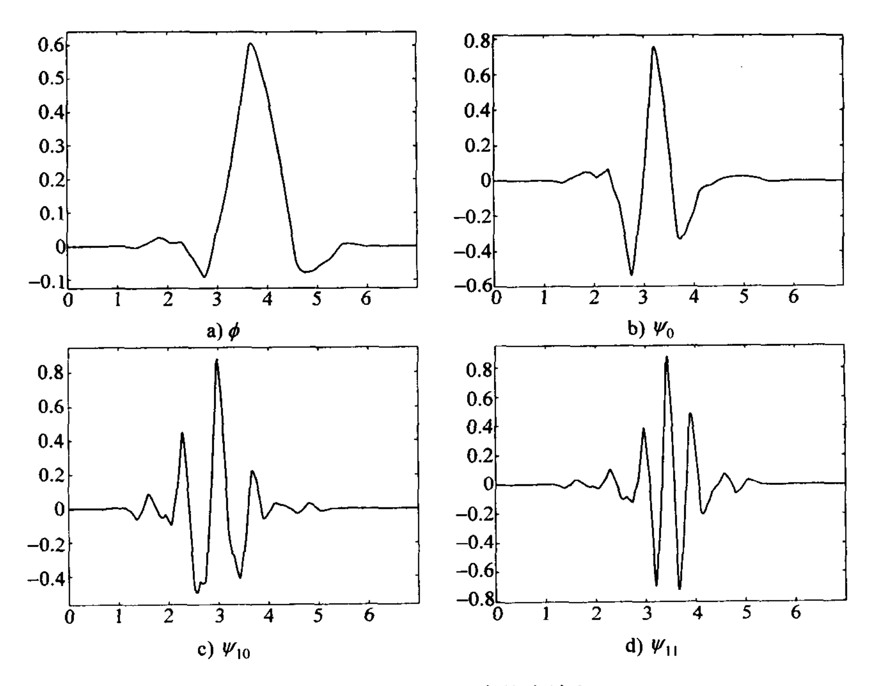


图 7-13 用 ϕ_{D8} 生成的小波包

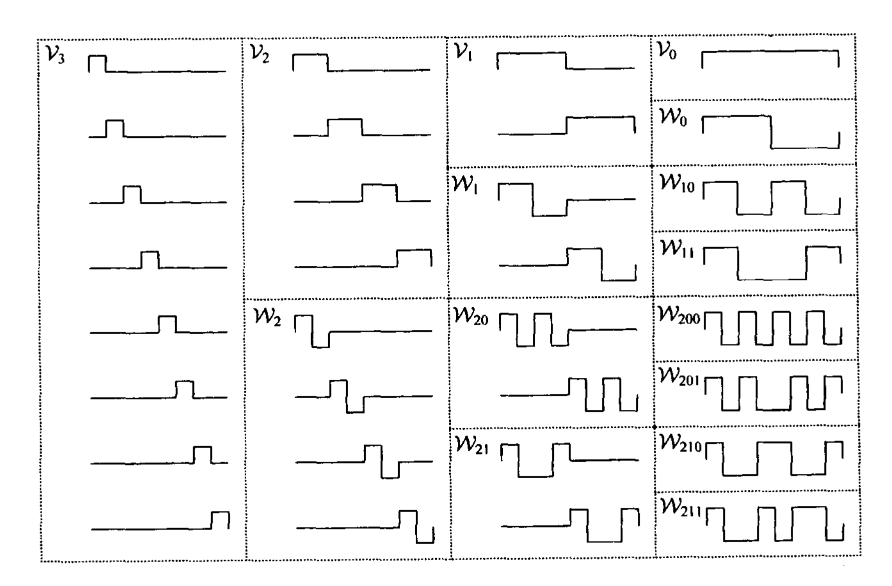


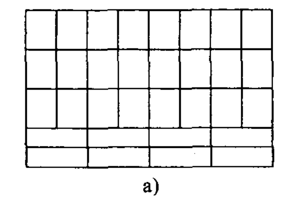
图 7-14 哈尔小波包

7.3.2 自适应小波包系统

通常，我们考虑每个通道或每带的输出为小波变换，并且由此得到一个非冗余的基系统．然而，如果在每带的输出和每步或每个尺度处同时考虑信号，那么就有比输入多的输出，并且显然有一个冗余系统．由所有这些输出，我们可以选择一个无关的子集作为一组基．这可以用自适应的方式做到，这种方式依赖于关于某些最优化准则的信号特征．一种可能性是图 3-3 给出的正规小波分解．另一种可能性是图 7-10 给出的完全小波包分解．这棵完全树的任何修剪都产生一个有效的小波包基系统，并且允许时-频平面的一个很灵活的花砖．

我们可以选择一个基向量集合，并且形成一组规范正交基，使得在变换系数上某些成本的测度最小．进而，当成本增加时，最好的规范正交小波包变换可以由一种二进搜索算法[CW92]用 $O(N\log N)$ 次计算得到．

得到的时-频花砖的一些例子如图 7-15 所示．这些划分表示小波包变换的频率自适应能力．


a)

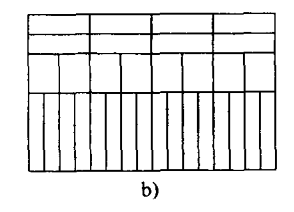

b)

图 7-15 不同的三尺度正交小波包变换时-频花砖的例子

使用自适应小波包有两种方法．第一种方法是选择基于处理的信号类特征的一种特定的分解(滤波器组修剪)，然后对每个单独信号使用非自适应变换．另一种方法是对于每个单信号使用自适应分解．第一种方法是信号类的线性过程．第二种方法不是线性过程，并且不服从叠加原理．

令 $P(J)$ 表示不同的 J 尺度规范正交小波包变换的数目．我们可以容易地看到

$$P(J) = P(J-1)^2 + 1, \quad P(1) = 1. \tag{7.30}$$

所以，可以选择的数目随着尺度的增加而迅速地增大．这是小波包在实际应用中是一个很有用的工具的另外一个原因．例如，指纹图像压缩的 FBI 标准[BBH93, BBOH96]是以小波包变换为基础的．小波包还成功地用于声音的信号压缩[Wic92]．在[RV93]中，一种评价失真的测度使用小波包变换改进图像压缩的实现．

M 带离散小波变换给出了一种可伸缩的时-频平面花砖．它们依赖于一种特定的树结构滤波器组，其中在任一深度的低通道分裂为 M 个带．结合 M 带和小波包结构给出任意的树结构滤波器组，其中所有的通道(使用具有可能不同带数的滤波器组)分裂为子通道，并且给出一个很灵活的信号分解．这类似于小波包分解[CW92]．对于一个给定的信号或信号类，以及一组固定的滤波器，我们可以得到(在某种意义下)最好的滤波器组树拓扑．对于一棵二叉树，使用熵作为准则的一个有效方法已经讨论了——最优小波包基算法[CW92, RV93].

7.4 双正交小波系统

经过平移和伸缩的小波展开系统是正交的这一要求给出帕塞瓦尔定理清楚的、健全的和对称的阐述．还可以加更强的限制于系统的可能的情况上．要求正交性用完大量的自由度，得到复杂的设计方程，给出线性相位分析和综合滤波器组，并且给出不对称性分析和综合系统．本节将讨论使用一个非正交基和对偶基的双正交小波系统，这将可以更灵活地达到其他目的，但却失去了帕塞瓦尔定理陈述的能量划分特性[CDF92，Wei95，Tia96，WTWB97，NH96，AAU96，Coh92，KT93，RG95，Swe96a]．有些研究者考虑“几乎正交”系统，这放松了一些正交约束，以便改善其他的特征[OB95]．事实上，许多图像压缩方案(包括由FBI[BBH93，BBOH96]使用的指纹压缩)使用双正交系统．

7.4.1 2带双正交滤波器组

110～114

前面几章中的正交小波、分析滤波器与综合滤波器彼此之间是时间反转的，即 $\tilde{h}(n)=h(-n)$，$\tilde{g}(n)=g(-n)$．这里，对于双正交情形，我们放松这些限制．然而，为了完全重构输入，这四个滤波器仍要满足一组关系．

令 $c_1(n)(n\in\mathbf{Z})$ 是图7-16中滤波器组的输入，那么分析滤波器组的输出是

$$c_0(k)=\sum_n \tilde{h}(2k-n)c_1(n),\quad d_0(k)=\sum_n \tilde{g}(2k-n)c_1(n). \tag{7.31}$$

图7-16 2带双正交滤波器组

综合滤波器组的输出是

$$\tilde{c}_1(m)=\sum_k [h(2k-m)c_0(k)+g(2k-m)d_0(k)]. \tag{7.32}$$

将方程(7.31)代入(7.32)，并交换和给出

$$\tilde{c}_1(m)=\sum_n\sum_k [h(2k-m)\tilde{h}(2k-n)+g(2k-m)\tilde{g}(2k-n)]c_1(n). \tag{7.33}$$

为了完全重构，即 $\tilde{c}_1(m)=c_1(m)(\forall m\in\mathbf{Z})$，我们需要

$$\sum_k [h(2k-m)\tilde{h}(2k-n)+g(2k-m)\tilde{g}(2k-n)]=\delta(m-n). \tag{7.34}$$

而这个条件可以极大地简化．为此，四个滤波器具有如下关系[CDF92]：

$$\tilde{g}(n)=(-1)^n h(1-n),\quad g(n)=(-1)^n\tilde{h}(1-n), \tag{7.35}$$

直到某个常数因子．因此，它们是通过每隔一个元素时间反转和转换符号方向得到的交叉

关系．显然，当$\tilde{h}=h$时，我们得到正交小波的尺度系数与小波系数之间常用的关系$g(n)=(-1)^n h(1-n)$．代(7.35)到(7.34)，得到

$$\sum_n \tilde{h}(n)h(n+2k)=\delta(k). \tag{7.36}$$

在正交的情形中，有$\sum_n h(n)h(n+2k)=\delta(k)$，即$h(n)$正交于它本身的偶数平移．这里，$\tilde{h}$正交于$h$，因此命名为双正交(biorthogonal).

115

方程(7.36)是理解双正交滤波器组的关键．假定当$\tilde{N}_1\leqslant n\leqslant\tilde{N}_2$时，$\tilde{h}(n)$是非零的，并且当$N_1\leqslant n\leqslant N_2$时，$h(n)$是非零的．方程(7.36)推出[CDF92]

$$N_2-\tilde{N}_1=2k+1,\quad \tilde{N}_2-N_1=2\tilde{k}+1,\quad k,\tilde{k}\in\mathbf{Z}. \tag{7.37}$$

在正交的情形中，这归约为众所周知的事实：h的长度必定是偶数．方程(7.37)还推出$\tilde{h}$与h长度之差一定是偶数．因此，它们的长度一定都是偶数或者都是奇数．

7.4.2 双正交小波

为看到怎样去掉正交性和引入一组对偶基改变它们的性质，现在先来看一看尺度函数和小波．我们再一次从尺度函数的基本多分辨定义出发，并且添加一个对偶尺度函数类似的定义，

$$\phi(t)=\sum_n h(n)\sqrt{2}\phi(2t-n), \tag{7.38}$$

$$\tilde{\phi}(t)=\sum_n \tilde{h}(n)\sqrt{2}\tilde{\phi}(2t-n). \tag{7.39}$$

由第5章的定理1知，对于ϕ和$\tilde{\phi}$，存在

$$\sum_n h(n)=\sum_n \tilde{h}(n)=\sqrt{2}. \tag{7.40}$$

继续相似于正交小波的构造，定义小波和对偶小波为

$$\psi(t)=\sum_n g(n)\sqrt{2}\phi(2t-n)=\sum_n(-1)^n\tilde{h}(1-n)\sqrt{2}\phi(2t-n), \tag{7.41}$$

$$\tilde{\psi}(t)=\sum_n \tilde{g}(n)\sqrt{2}\tilde{\phi}(2t-n)=\sum_n(-1)^n h(1-n)\sqrt{2}\tilde{\phi}(2t-n). \tag{7.42}$$

现在，我们有了尺度函数和小波函数以及它们的对偶，问题变成了是否我们能使用它们展开和重构任意函数．下面的定理[CDF92]回答了这个重要的问题．

定理37 对于满足(7.36)的$\tilde{h}$和h，假定对于某个C，$\varepsilon>0$，

$$|\Phi(\omega)|\leqslant C(1+\omega)^{-1/2-\varepsilon},\quad |\tilde{\Phi}(\omega)|\leqslant C(1+\omega)^{-1/2-\varepsilon}. \tag{7.43}$$

如果上面定义的ϕ和$\tilde{\phi}$在频域内有充分的衰减，那么$\psi_{j,k}\overset{\text{def}}{=}2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ $(j,\ k\in\mathbf{Z})$构成$L^2(\mathbf{R})$的一个框架．它们的对偶用$\tilde{\psi}_{j,k}\overset{\text{def}}{=}2^{j/2}\tilde{\psi}(2^jx-k)$ $(j,\ k\in\mathbf{Z})$给出，对于任一$f\in L^2(\mathbf{R})$，

$$f=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k}=\sum_{j,k}\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\psi_{j,k}, \tag{7.44}$$

[116] 其中级数强收敛.

进而，$\psi_{j,k}$和$\tilde{\psi}_{j,k}$构成两组里斯基，有

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta(j-j')\delta(k-k'), \tag{7.45}$$

当且仅当

$$\int \phi(x)\,\tilde{\phi}(x-k)\,\mathrm{d}x = \delta(k). \tag{7.46}$$

这个定理说明，在某些技术条件之下，我们可以使用小波展开函数并且使用它们的对偶重构函数. 第2章中的多分辨阐述可以修正为

$$\cdots \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots, \tag{7.47}$$

$$\cdots \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-2} \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-1} \subset \tilde{\mathcal{V}}_0 \subset \tilde{\mathcal{V}}_1 \subset \tilde{\mathcal{V}}_2 \subset \cdots, \tag{7.48}$$

其中

$$\mathcal{V}_j = \operatorname*{Span}_k \{\phi_{j,k}\}, \quad \tilde{\mathcal{V}}_j = \operatorname*{Span}_k \{\tilde{\phi}_{j,k}\}. \tag{7.49}$$

如果(7.46)成立，那么有

$$\mathcal{V}_j \perp \tilde{\mathcal{W}}_j, \quad \tilde{\mathcal{V}}_j \perp \mathcal{W}_j, \tag{7.50}$$

其中

$$\mathcal{W}_j = \operatorname*{Span}_k \{\psi_{j,k}\}, \quad \tilde{\mathcal{W}}_j = \operatorname*{Span}_k \{\tilde{\psi}_{j,k}\}. \tag{7.51}$$

虽然$\mathcal{W}_j$不像前面那样是$\mathcal{V}_{j+1}$中$\mathcal{V}_j$的正交补，但是对偶空间$\tilde{\mathcal{W}}_j$却起了所需的作用. 因此，我们有四组空间，形成两个系统以张成$L^2(\mathbf{R})$.

在5.8节给出了不要求正交性的尺度函数和小波的性质. 第6章中的正则性和矩的结果也可以推广到双正交系统.

7.4.3 正交小波和双正交小波的比较

双正交小波系统推广了经典的正交小波系统. 它们更灵活并且一般易于设计. 正交小波系统和双正交小波系统之间的差别总结如下.

- 正交小波滤波器和尺度滤波器必定是同样长度的，并且长度必定是偶数. 这个限制对于双正交系统已经放松.
- 在双正交小波的范围内，可能有对称小波和对称尺度函数. 实际上，这是跨越正交小波选择双正交小波的主要原因之一.
- 在双正交小波系统中，帕塞瓦尔定理不再成立，即系数的范数与张成的函数的范数不相同. 这是使用双正交系统的主要缺点. 许多设计致力于得到接近正交的系统，以使范数是接近的. [117]
- 在一个双正交系统中，如果我们转换初始的和对偶的角色，整个系统仍然是完善的. 因此，对于应用，我们可以选择最好的安排. 例如，对于图像压缩，我们比较喜欢使用一对中比较光滑的重构编码图像以得到比较好的视觉效果.

- 在统计信号处理中，高斯白噪声在正交变换后仍然是白的．如果变换不是正交的，那么噪声变成是相关的或者有色的．因此，当在估计和检测中使用双正交小波时，我们或许需要调整算法以更好地挑选有色噪声．

7.4.4 双正交系统族的例子

因为双正交小波系统很灵活，所以有多种方法设计不同的双正交系统．关键是设计一对滤波器 h 和 $\tilde{h}$ 使得满足(7.36)与(7.40)，并且具有一些希望有的特性．这里，我们观察若干双正交小波族，并且讨论它们的性质和设计方法．

7.4.5 双正交样条小波的 Cohen-Daubechies-Feauveau 族

样条函数在逼近论和数值算法中有广泛的应用．所以，它们可能是合乎需要的尺度函数，因为它们是对称的、光滑的，并且具有二进的滤波器系数(见5.7节)．然而，如果在正交小波系统中使用它们作为尺度函数，小波必须有无限支撑[Chu92a]．另一方面，在双正交小波系统中使用样条函数是很容易的．选择 h 是一个能生成样条函数的滤波器，那么(7.36)和(7.40)关于 $\tilde{h}$ 的系数是线性的．因此，只要解线性方程组得到 $\tilde{h}$，并且得到的 $\tilde{h}$ 也有二进系数．在[CDF92]中，使用更好的方法直接解这些方程．

双正交样条小波的 Cohen-Daubechies-Feauveau 族一些成员的滤波器系数在表7-1中列出．注意，它们是对称的．同时还表明，随着长度的增加，这个族的 ϕ 与 $\tilde{\phi}$ 的正则性也增加．

表7-1 双正交样条小波的 Cohen-Daubechies-Feauveau 族一些成员的滤波器系数
(对于比较长的滤波器，我们只列出一半系数)

$h/\sqrt{2}$	$\tilde{h}/\sqrt{2}$
1/2, 1/2	-1/16, 1/16, 1/2, 1/16, -1/16
1/4, 1/2, 1/4	-1/8, 1/4, 3/4, 1/4, -1/8
1/8, 3/8, 3/8, 1/8	-5/512, 15/512, 19/512, -97/512, -13/256, 175/256, …

7.4.6 具有较小不同滤波器长度的双正交小波的 Cohen-Daubechies-Feauveau 族

双正交小波的 Cohen-Daubechies-Feauveau 族或许是最广泛使用的双正交小波，因为尺度函数和小波是对称的，并且具有类似的长度．族中的一些成员在 FBI 指纹压缩标准中使用[BBH93, BBOH96]．这个族的设计方法是非常简单和优美的．

118

在频域中，(7.36)可以写为

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega)+H(\omega+\pi)\tilde{H}^*(\omega+\pi)=2. \tag{7.52}$$

在第6章中，对于 $|H(\omega)|^2=M(\omega)$，我们有一个明确的解使得

$$M(\omega)+M(\omega+\pi)=2, \tag{7.53}$$

并且得到的紧支撑正交小波对于它的长度能够具有最大数目的零矩．在正交的情形下，我们由因式分解 $M(\omega)$ 为 $H(\omega)H^*(\omega)$ 而得到一个尺度滤波器．而在双正交的情形下，我们

可以因子化同样的 $M(\omega)$ 以得到 $H(\omega)$ 与 $\tilde{H}(\omega)$.

导出具有类似长度的对称的 h 和 $\tilde{h}$ 的因子化在[CDF92]中已经求得，并且它们的系数列在表7-2中．在FBI指纹压缩标准中使用的族的成员是尺度函数和小波函数的图像如图7-17所示．

表7-2 双正交小波的 Cohen-Daubechies-Feauveau 族之一的系数，它用于 FBI 指纹压缩标准(我们只列出了一半系数)

$\tilde{h}$	h
0.85269867900889	0.78848561640637
0.37740285561283	0.41809227322204
-0.11062440441844	-0.04068941760920
-0.02384946501956	-0.06453888262876
0.03782845550726	

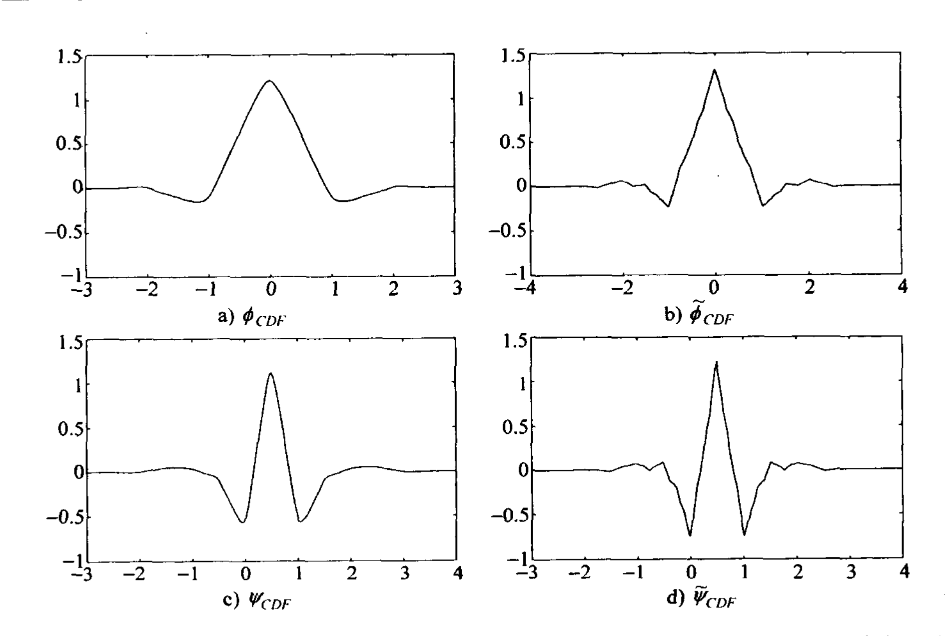


图7-17 在FBI指纹压缩标准中使用的双正交小波的 Cohen-Daubechies-Feauveau 族之一的尺度函数和小波以及它们的对偶的图形

7.4.7 双正交 Coiflet 系统的 Tian-Wells 族

Coiflet 系统是一个紧支撑正交小波族，它具有6.9节中描述的尺度函数和小波的零矩．与只具有小波零矩的 Daubechies 小波，Coiflet 系统是比较对称的，并且，当使用抽样数据时，它可以有更好的逼近性质．然而，求正交 Coiflet 系统需要解一个非线性方程组．但不能求得接近的形式解，并且，当长度增加时，这些方程的数值解变得不稳定．

Tian 和 Wells[TW95, TWBOar]构造了具有尺度函数零矩和小波零矩的双正交小波系统. 对于这些双正交 Coiflet 求得了接近的形式解. 它们具有类似于 Coiflet 的逼近性质, 并且像样条函数那样, 滤波器系数是二进有理数. 这些双正交 Coiflet 的滤波器系数在表 7-3 中列出. 这个族中的一些成员也在前面描述的样条族中.

表 7-3 双正交 Coiflet 一些成员的系数. 对比较长的滤波器, 我们只列出一半系数

$\sqrt{2}h$	$\sqrt{2}\tilde{h}$
1, 1	1, 1
1/2, 1, 1/2	-1/4, 1/2, 3/2, 1/2, -1/4
3/8, 1, 3/4, 0, -1/8	3/64, 0, -3/16, 3/8, 41/32, 3/4, -3/16, -1/8, 3/64
-1/16, 0, 9/16, 1, 9/16, 0, -1/16	-1/256, 0, 9/128, -1/16, -63/256, 9/16, 87/64, …

119
~
120

7.4.8 双正交系统的提升构造

我们已经介绍了若干双正交系统和它们的设计方法. 还有另一种称为提升格式(lifting scheme)的方法, 它是很简单和通用的. 它有悠久的历史[Mar92, Mar93, DM93, KS92, VH92, Donar], 并且近期得到了系统地发展[Swe96a, Swe95]. 关键是使用简单的和可逆的步骤建立复杂的双正交系统. 第一步只是分为偶数抽样与奇数抽样, 而这显然是可逆的. 结构如图 7-18 所示, 并且在[Swe96a]中称为惰性(Lazy)小波变换.

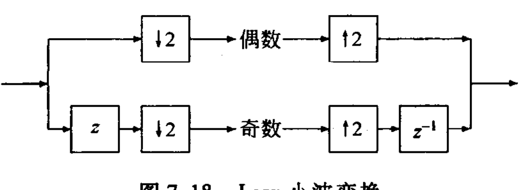


图 7-18 Lazy 小波变换

在把数据分为两部分后, 我们可以由一部分预测另一部分, 并且只保持预测的误差, 如图 7-19 所示. 我们可以用再计算预测然后添加返回预测重构数据. 在图 7-19 中, s 和 t 是预测滤波器.

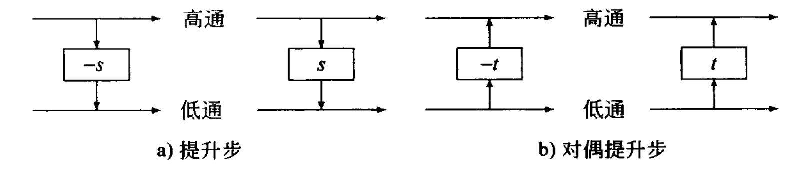
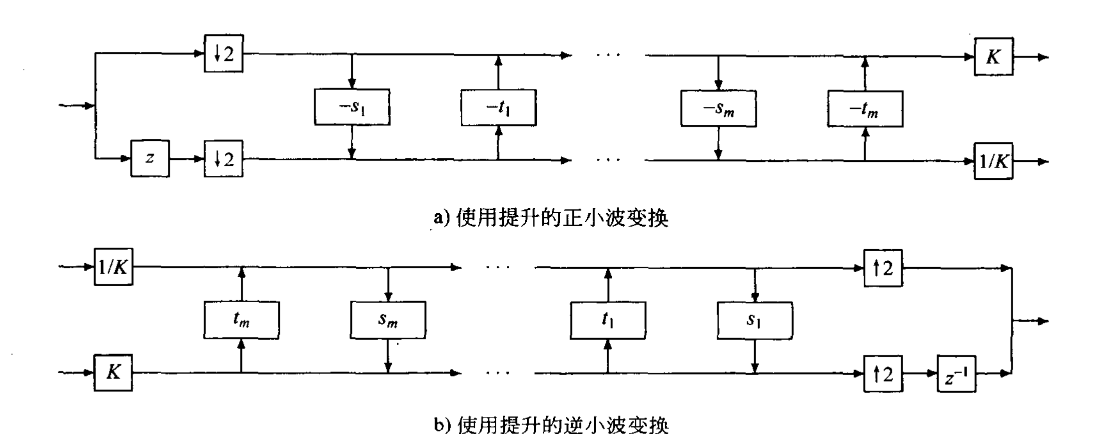


图 7-19 提升和对偶提升步

用连在一起的简单步骤, 我们可以实现如图 7-20 所示的正小波变换和逆小波变换. 这也称为阶梯结构(ladder structure), 并且由图可知命名的原因是清楚的. 显然, 系统是可逆的, 并且因此是双正交的. 进而, 已经证明了正交小波系统也可以使用提升实现[DS96a]. 提升的优点有很多:

- 提升步可以非放置计算. 如图 7-20 所示, 基于一个数据通道的预测滤波器输出可以添加到其他通道的数据中, 或者从其他通道的数据减去, 并且结果可以存储在



a) 使用提升的正小波变换

b) 使用提升的逆小波变换

图 7-20 使用提升的小波变换

第二个通道中同样的地方．不需要辅助的存储．

- 预测滤波器 s 和 t 不是线性的．像介质滤波器或旋转可以使用非线性运算，并且系统仍然是可逆的．这允许简单的推广到非线性小波变换和非线性多分辨分析．
- 双正交系统的设计压缩到预测滤波器的设计．这可能导致简单的方法，它不依赖傅里叶变换[Swe96a]，并且能推广到非正则抽样或非正则流形．
- 对于双正交系统，提升实现需要比直接实现少的数值运算[DS96a]．对于正交的情形，提升格式计算复杂性类似于点阵因子化，这几乎是直接实现的一半．

7.5 多小波

在第 2 章中，介绍了 L^2 函数空间的多分辨分析，其中有一组嵌套空间

$$\{0\} \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset L^2, \tag{7.54}$$

这里，每一个子空间由单个尺度函数 φ 的尺度的平移张成，例如

$$\mathcal{V}_j = \operatorname*{Span}_k \{2^{j/2}\varphi(2^j t - k)\}. \tag{7.55}$$

嵌套子空间之间的直接差空间是由相应尺度上的单个小波的平移张成，例如

$$\mathcal{W}_j = \mathcal{V}_{j+1} \ominus \mathcal{V}_j = \operatorname*{Span}_k \{2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}. \tag{7.56}$$

这种构造有许多局限性．例如，非平凡的正交小波不能是对称的．为避免这个问题，我们推广这种基本构造，并且在 7.2 节中引入了重数 M(M 带)尺度函数和小波，其中差空间由$M-1$ 个小波的平移张成．尺度是 M 的幂，即

$$\varphi_{j,k}(t) = M^{j/2}\varphi(M^j t - k). \tag{7.57}$$

121 ≀ 122

一般地，对 M 带小波的设计有更多的自由度．然而，嵌套$\mathcal{V}$空间仍然由单个的尺度函数的平移张成．多小波(multiwavelet)去掉了上述的限制，因此，可以用多个尺度函数张成嵌套$\mathcal{V}$空间[GLT93，GL94，Str96b]．虽然可以构造 M 带多小波，但是这里我们只给出关于 2

带情况的结果，大量的研究在文献中给出.

7.5.1 2 带多小波的构造

假定$\mathcal{V}_0$由 R 个不同的尺度函数 $\varphi_i(t)(i=1, \cdots, R)$的平移张成. 对于一个 2 带系统，定义这些函数的伸缩与平移为

$$\varphi_{i,j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi_i(2^j t - k). \tag{7.58}$$

由多分辨阐述推出

$$\mathcal{V}_j = \operatorname*{Span}_k\{\varphi_{i,j,k}(t): i = 1,\cdots,R\}. \tag{7.59}$$

下面构造一个向量尺度函数为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = [\varphi_1(t),\cdots,\varphi_R(t)]^{\mathrm{T}}. \tag{7.60}$$

因为$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$，所以有

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \boldsymbol{H}(n)\boldsymbol{\Phi}(2t-n)}, \tag{7.61}$$

其中对于每个 $k \in \mathbf{Z}$，$\boldsymbol{H}(k)$是 $R \times R$ 矩阵. 这是数量递推方程(2.13)的一种矩阵模型. 第一个且最简单的多尺度函数可能出现在[Alp93]中，而它们表示在图 7-21 中.

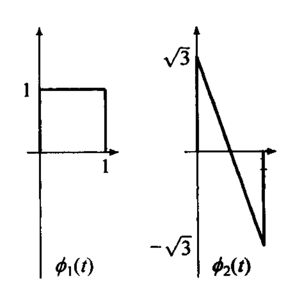


图 7-21 最简单的 Alpert 多尺度函数

第一个尺度函数 $\varphi_1(t)$仅是哈尔尺度函数，并且它是两个自身的时间压缩和平移模型的和，如图 2-2(a)所示. 第二个尺度函数可以分解为哈尔尺度函数和它自身的时间压缩与平移模型的线性组合，形如

$$\varphi_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_1(2t) + \frac{1}{2}\varphi_2(2t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_1(2t-1) + \frac{1}{2}\varphi_2(2t-1). \tag{7.62}$$

这在图 7-22 中给出 [123]

把两个尺度函数结合在一起，有

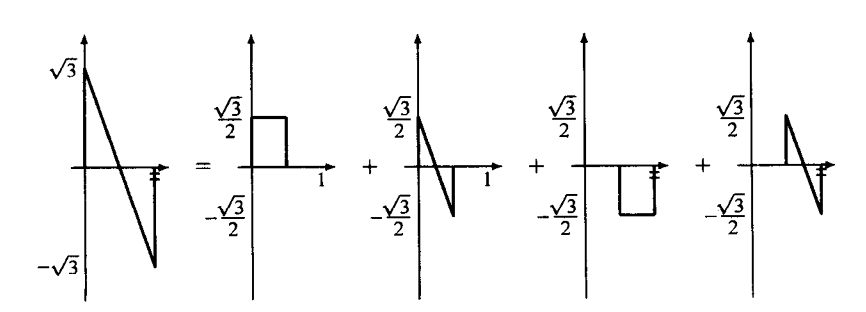


图 7-22 多小波加细方程(7.62)

$$\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1(2t)\\ \varphi_2(2t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1(2t-1)\\ \varphi_2(2t-1)\end{bmatrix}. \tag{7.63}$$

进而，假定 R 个小波张成差空间，即

$$\mathcal{W}_j=\mathcal{V}_{j+1}\ominus\mathcal{V}_j=\operatorname*{Span}_k\{\psi_{i,j,k}(t):i=1,\cdots,R\}. \tag{7.64}$$

因为$\mathcal{W}_0\subset\mathcal{V}_1$，对于排为一列的小波 $\boldsymbol{\Psi}(t)$，存在一个 $R\times R$ 矩阵序列 $\boldsymbol{G}(k)$，使得

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi}(t)=\sqrt{2}\sum_k\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{\Phi}(2t-k)}, \tag{7.65}$$

这是两尺度递推方程(2.13)与(2.24)的向量模型.

我们还可以定义 $\boldsymbol{H}(k)$ 和 $\boldsymbol{G}(k)$ 的离散时间傅里叶变换为

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\sum_k\boldsymbol{H}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k},\quad \boldsymbol{G}(\omega)=\sum_k\boldsymbol{G}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}. \tag{7.66}$$

7.5.2 多小波的性质

逼近、正则性和光滑性

在第6章中，正则性和光滑性的关键是 $H(\omega)$ 在 π 具有足够的零点. 对于多小波，已经证明了多项式可以用 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的平移精确地再生当且仅当 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 能够以一种特殊的形式因子化[Plo95c, Plo95a, Plo95b]. 因子化习惯用于研究可加细函数向量的正则性和收敛性[CDP95]，并且构造具有逼近性和对称性的多尺度函数[PS95]. 多重可加细函数的逼近性和光滑性还在[HSS96, JRZ96a, JRZ97]中得到了研究.

支撑

一般地，$\boldsymbol{H}(k)$ 和 $\boldsymbol{G}(k)$ 的有限长度保证 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 的有限支撑. 然而，在 $\boldsymbol{H}(k)$ 和

124

$\boldsymbol{G}(k)$ 的支撑长度和非零系数数目之间没有直接的联系. 一种解释是零有效矩阵的存在性[SW97]. 估计支撑的一种方法在[SW97]中探讨.

正交性

这些尺度函数和小波，彼此之间正交并且正交于它们的平移，需要满足[SS95]

$$\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{H}^{\dagger}(\omega)+\boldsymbol{H}(\omega+\pi)\boldsymbol{H}^{\dagger}(\omega+\pi)=\boldsymbol{I}_R, \tag{7.67}$$

$$\boldsymbol{G}(\omega)\boldsymbol{G}^{\dagger}(\omega)+\boldsymbol{G}(\omega+\pi)\boldsymbol{G}^{\dagger}(\omega+\pi)=\boldsymbol{I}_R, \tag{7.68}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{G}^{\dagger}(\omega)+\boldsymbol{H}(\omega+\pi)\boldsymbol{G}^{\dagger}(\omega+\pi)=\boldsymbol{0}_R, \tag{7.69}$$

其中“$\dagger$”表示复共轭转置，$\boldsymbol{I}_R$ 和 $\boldsymbol{0}_R$ 分别是 $R\times R$ 单位矩阵和零矩阵. 这些是(5.22)和(5.30)的矩阵形式. 在数量的情形，如果我们选择小波滤波器用时间反转尺度滤波器和改变每隔一个系数的符号，那么(5.30)容易满足. 然而，对于矩阵的情形，因为矩阵一般不是可交换的，所以我们不能由 $\boldsymbol{H}(k)$ 直接得到 $\boldsymbol{G}(k)$. 这使得由尺度函数求小波有些困难，然而，即使尺度函数固定了，这也使我们可以灵活地设计不同的小波[SS95].

在(7.67)~(7.69)中的条件是必要的，但不是充分的. Lawton 充分条件(第5章定理14)的推广在[Plo97b, Plo97a, JRZ96b]中已经讨论了.

7.5.3 多小波变换的实现

令多尺度函数和多小波的展开系数是

$$c_{i,j}(k) = \langle f(t), \varphi_{i,j,k}(t)\rangle, \tag{7.70}$$

$$d_{i,j}(k) = \langle f(t), \Psi_{i,j,k}(t)\rangle. \tag{7.71}$$

我们建立向量

$$C_j(k) = [c_{1,j}(k), \cdots, c_{R,j}(k)]^{\mathrm{T}}, \tag{7.72}$$

$$D_j(k) = [d_{1,j}(k), \cdots, d_{R,j}(k)]^{\mathrm{T}}. \tag{7.73}$$

对于$\mathcal{V}_0$中的$f(t)$，可以写为尺度函数和小波的线性组合

$$f(t) = \sum_k C_{j_0}(k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_{J_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k D_j(k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Psi}_{j,k}(t). \tag{7.74}$$

使用(7.61)和(7.65)，有

$$C_{j-1}(k) = \sqrt{2}\sum_n \boldsymbol{H}(n) C_j(2k+n) \tag{7.75}$$

和

$$D_{j-1}(k) = \sqrt{2}\sum_n \boldsymbol{G}(n) C_j(2k+n). \tag{7.76}$$

进而，

$$C_j(k) = \sqrt{2}\sum_k (\boldsymbol{H}(k)^{\dagger} C_{j-1}(2k+n) + \boldsymbol{G}(k)^{\dagger} D_{j-1}(2k+n)). \tag{7.77}$$

这是(3.9)、(3.10)与(3.20)的向量形式．因此，对于多小波变换，综合滤波器组与分析滤波器组与数量情形有类似的结构．差别是滤波器组在 R 块输入上运算，并且滤波和速率变化都借助于输入块．

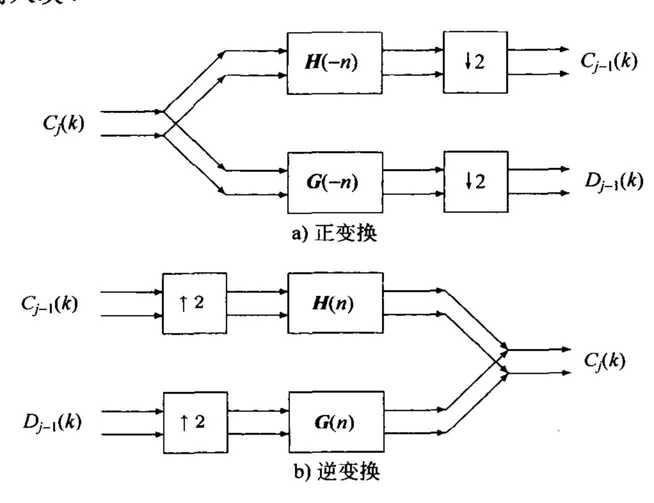


图 7-23　离散多小波变换

为开始多小波变换，我们需要得到在高分辨上的尺度系数．在数量情形中，尺度函数在很高的分辨上接近 δ 广义函数，所以用函数的抽样作为尺度系数．然而，对于多小波，我们需要 R 个尺度函数的展开系数．简单地使用接近的抽样作为尺度系数不是一种好的选择．数据抽样必须预处理(预滤波，prefilter)以产生在最高尺度上多尺度函数的展开系数的适当的值．基于插值[XGHS96]、逼近[HR96]以及正交投影[VA96]的预滤波器已经设计出来了．

7.5.4 例子

因为自由度比较大，所以构造多小波有许多方法．

Geronimo-Hardin-Massopust 多小波

一组基于分形插值函数的多尺度滤波器已在[GHM94]中讨论了，并且相应的多小波在[SS95]中构造．如图7-24所示，它们都是对称的和正交的——对于2带正交数量小波，这是不可能的．它们还具有紧支撑，并且恰好可以再现帽函数．这些性质使多小波成为一个有前途的展开系统．

126

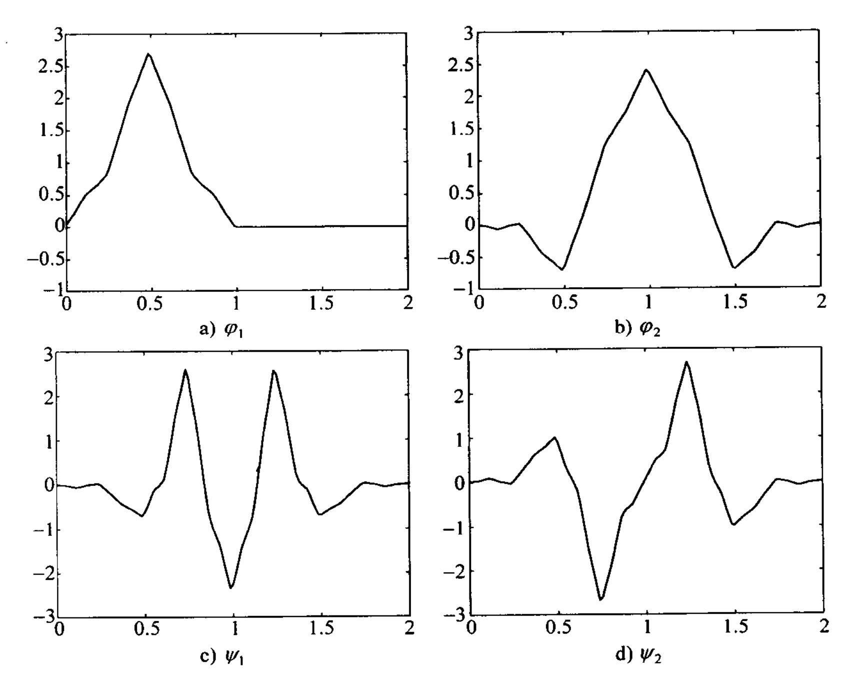


图7-24 Geronimo-Hardin-Massopust 多尺度函数和 Strang-Strela 多小波

样条多小波

样条基关于它们的长度有一个最大的逼近阶，然而样条单小波只是半正交的[SS94]．一族对称且正交的样条多小波在[RN96]中讨论．

其他构造

其他类型的多小波使用埃尔米特(Hermite)插值条件[CL96]、矩阵谱因子化[CNKS96]，有限元[SS94]以及斜投影[Ald96]构造．类似于多小波，向量值小波和向量滤波器组还在[XS96]讨论了．

127

7.5.5 应用

多小波已经用于数据压缩[HSS*95，LLK96，SHS*96]、去噪[DS96b，SHS*96]以及积分方程的解[CMX96]．因为多小波可以提供兼有正交性、对称性、高阶逼近以及短的支撑，频繁地使用多小波方法常常超过实现使用类似的数量小波．然而，预滤波的求得是很重要的，并且应用时要仔细地选择[DS96b，SHS*96，XGHS96]．还有，因为离散多小波变换在数据的 R 大小的块上运算，并且生成小波系数块，必须利用每个系数块内的相关性．对于图像压缩，为了减少比特比率，预测法则需要利用相关性[LLK96]．对于去噪，在每个块中，共同的阈值可改进实现．

7.6 超完全表示、框架、冗余变换和自适应基

本章应用第4章中引入的框架和紧框架的概念以及基以得到许多信号类的一种更有效的表示．回顾一下相关章节中关于基和框架的内容，再阅读本节或许是有帮助的．

传统的基系统(例如傅里叶、盖博、小波以及小波包)对于一些信号类是有效的表示，但是在许多情形中，单个系统是无效的．例如，傅里叶基对于正弦信号或光滑的周期信号是有效的，但是对于瞬变的信号或像鸟叫的信号是不好的．每个系统对于有定义但是很窄的一类信号看起来似乎是最好的．近来的研究指出，在效率方面重要的改进可以由组合若干个基系统达到．我们可以直观地想像运动傅里叶分量直至展开的系数停止快速地下降，然后转到一个不同的基系统，以扩大剩余的项，并且在展开停止快速地下降之后，仍然转到另一个基系统．显然，这不是一种唯一的展开，因为使用的展开系统的阶给出不同的结果．这是因为全体展开系统是单独的基系统的一个线性组合，所以不是一组基本身而是一个框架．它是一种超完全展开系统，并且有利于使用不唯一展开的自由度的各种准则已经讨论了．基系统的集合，由这个集合选择展开向量的子集，有时称为字典．

这个问题至少有两种描述．我们可能想要用一个信号展开系统处理若干不同的信号类，它们的每个用一个特定的基系统很好表示或者我们可以有一个信号类，但是这个类的元素是很好表示类的元素的线性组合．在另一种情况中，有若干重要的准则[CD94，CD95a]：

- *稀疏性*(sparsity)：展开在最少数目的系数中要有最多的重要信息，使得其他的系数的信息小得足以忽略或等于零．这对于压缩或去噪是重要的．
- *分离*(separation)：如果测量由具有不同特征的信号的一个线性组合构成，那么展开系数清晰地分离这些信号．如果一个信号有许多好的性质，那么展开就清晰地

128

分离这些性质．这对于滤波和检测是重要的．

- 超分辨(superresolution)：信号的分辨或一个信号的特征要比具有一个传统基系统好．这对于线性滤波、检测和估计同样是重要的．
- 稳定性(stability)：借助于新的超完全系统的展开不会由干扰或噪声显著地改变．这在实现和数据测量中是重要的．
- 速度(speed)：在新的超完全系统中，展开系数的数值计算阶是 $O(N)$ 或 $O(N\log(N))$．

这些准则通常是彼此冲突的，并且对于一个可接受的平衡，各种折衷将在算法和问题陈述中得到．

7.6.1 超完全表示

本节使用第4章中关于基和框架的知识．目的是使用展开函数的一个“字典”表示一个信号，展开函数包括傅里叶基、小波基、盖博基等．我们陈述这个问题的有限维情形为

$$y(n) = \sum_k \alpha_k x_k(n) \quad n,k \in \mathbf{Z}, \tag{7.78}$$

对于 $n=0, 1, 2, \cdots, N-1$ 和 $k=0, 1, 2, \cdots, K-1$ 成立．因此可以写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\alpha \tag{7.79}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 是以信号值 $y(n)$ 为元素的一个 $N\times1$ 向量，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 是 $N\times K$ 的，它的列由字典中的所有函数组成，并且 α 是展开系数 α_k 的一个 $K\times1$ 向量．矩阵算子以基信号 $\boldsymbol{x}_k$ 为它的列，使得矩阵乘法(7.79)仅是信号展开(7.78)．

对于一个给定的信号表示问题，我们需要确定两点：使用的字典是什么(即 $\boldsymbol{X}$ 的选择)，和如何借助于这个字典表示信号(即 α 的选择)．因为字典是超完全的，所以有若干可能的 α 的选择，并且通常地，我们使用先验的知识，或者我们之前计算 α 看到的描述的性质．

7.6.2 矩阵的例子

考虑一个简单的具有正交基向量

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{7.80}$$

的二维系统，它给出以 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 为列的矩阵算子

129

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}. \tag{7.81}$$

具有这个平凡算子的分解给出一种时域的描述，因为在分解中，第一个展开系数 α_0 是信号的第一个值 $x(0)$，并且第二个系数是信号的第二个值．使用一个不同的基向量集可以给出算子

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}0.7071 & 0.7071\\0.7071 & -0.7071\end{bmatrix} \tag{7.82}$$

这组规范化的基向量仍是正交的，但是现在由(7.81)中基向量旋转45°角．这个分解是一种频域展开．第一列向量是常数信号，并且它的展开系数 $\alpha(0)$ 是信号的平均．第二列向

量的系数将计算 $y(0)$ 与 $y(1)$ 的差分，所以是一种变化的度量.

注意到 $y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 可以使用(7.81)用一个非零系数精确表示，但是用(7.82)需要两个系数，而对于 $y=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，结论是相反的. 这是指，信号 $y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 与 $y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 可以用(7.81)稀疏表示，而 $y=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 与 $y=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 可以用(7.82)稀疏表示.

如果用前边的正交基系统的一个线性组合建立一个超完全展开，那么，对于前边的四个信号，它将可能有一个稀疏表示. 这由简单地添加(7.82)的列到(7.81)中去给出

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.7071 & 0.7071\\ 0 & 1 & 0.7071 & -0.7071\end{bmatrix} \tag{7.83}$$

这显然是超完全的，在一个二维空间中有四个展开向量. 求 α_k 需要解不定方程组，并且解是不唯一的.

例如，如果信号用

$$y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{7.84}$$

给出，那么就有无穷多的解，这些解的若干个列在下表中.

情形	1	2	3	4	5	6	7
α_0	0.5000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0
α_1	0.0000	0.0000	0	0	-1.0000	1.0000	0
α_2	0.3536	0	0.0000	0	1.4142	0	0.7071
α_3	0.3536	0	0	0.0000	0	1.4142	0.7071
$\lVert\alpha\rVert^2$	0.5000	1.0000	1.0000	1.0000	3.0000	3.0000	1.0000

130

对于 α_k，情形 1 是 $y=X\alpha$ 的极小范数解. 它由满足 MATLAB 指令 `a = pinv(X) * y` 的广义逆计算. 它也是在下节中讨论的冗余离散小波变换，并且用 `a = X' * y/2` 计算. 情形 2 是极小范数解，除了对于 α_k 的不多于两个非零值. 情形 2 还能用删除 3 列与 4 列的可逆矩阵(7.83)计算. 情形 3 用删除 2 列与 4 列的同样方法计算，情形 4 删除 2 列与 3 列，情形 5 删除 1 列与 4 列，情形 6 删除 1 列与 3 列，以及情形 7 删除 1 列与 2 列. 情形 3 到情形 7 是唯一的，因为缩减的矩阵是方阵，并且是非奇异的. 对于情形 1，α 的第二项是零，因为信号正交于展开向量. 注意到，α 的范数对于情形 1 是极小的，并且等于 y 用冗余除的范数，这里是用 2 除. 还注意到，情形 2、情形 3 和情形 4 中的系数是相同的，即使计算的方法不同.

因为 X 不仅是一个框架，而且是一个冗余为 2 的紧框架，α 的能量(平方模)是 y 的平方模的一半. 其他的分解(不是紧框架或基)不保持能量.

下面考虑一个不能只用一个展开向量精确表示的二维信号. 如果单位范数信号用

$$y=\begin{bmatrix}0.9806\\0.1961\end{bmatrix} \tag{7.85}$$

给出，对于前边描述的同样情形，展开系数列在表中．

情形	1	2	3	4	5	6	7
α_0	0.4903	0.9806	0.7845	1.1767	0	0	0
α_1	0.0981	0.1961	0	0	-0.7845	1.1767	0
α_2	0.4160	0	0.2774	0	1.3868	0	0.8321
α_3	0.2774	0	0	-0.2774	0	1.3868	0.5547
$\|\alpha\|^2$	0.5000	1.0000	0.6923	1.4615	2.5385	3.3077	1.0000

再次，情形1是极小范数解，然而，这时它没有零分量，因为没有展开向量正交于信号．由于信号位于90°展开向量与45°展开向量之间，这是情形3，它有最小两向量能量表示．

有无限多种方法构造超完全框架矩阵 X. 这个例子之一是四向量紧框架．除邻近向量外每个向量相隔45°. 因此，它们在二维空间180°上平面中均匀分布．下平面由这些框架向量的负方向覆盖．一个三向量紧框架有三列，在二维平面中彼此相隔60°. 一个36向量紧框架就有36列，彼此相隔5°. 在这样的系统中，任一信号向量将很接近一个展开向量.

另一种方法是构造一个具有非正交行的框架(不是紧的). 这将使得列不均匀分布，但是能比较好的描述一些特殊的信号类．事实上，我们可以设想构造具有接近间隔展开向量的一个框架算子，在这个区域中，信号最有可能出现，或者它们在这里具有最多的能量．

131

下面我们考虑一个特殊修改的紧框架构造以便给出一个平移不变离散小波变换．

7.6.3 平移不变冗余小波变换和非抽取的滤波器组

各种小波基分解和小波变换中的缺陷之一是离散小波变换不是平移不变的．如果你平移一个信号，你将希望简单地平移离散小波变换系数，但是事实不是这样的．它显著地改变了特性．

设想小波本身作为一个信号的离散小波变换．例如，如果信号是

$$y(n)=\varphi(2^4 n-10), \tag{7.86}$$

那么离散小波变换是

$$d_4(10)=1 \quad 所有其他的\ d_j(k)=c(k)=0. \tag{7.87}$$

换句话说，在正交小波基中的级数展开只有一个非零系数．

如果向右平移信号使得 $y(n)=\varphi(2^4(n-1)-10)$，那么将有许多非零系数，因为在这个平移或者位移下，信号不再正交于大多数基函数．信号能量将分布在许多更多的系数上，因为帕塞瓦尔定理，是在少数系数上．这将降低使用阈值方法的去噪或压缩．第9章中描述的离散小波变换在每个尺度 j 上是周期的，在平移 $n=2^j$ 之后，周期化的离散小波

变换重复它本身，但周期依赖于尺度．这还可由离散小波变换的滤波器组计算看出，其中每个尺度通过不同的抽取器，所以有不同的混淆现象．

建立一个线性的、平移不变的离散小波变换的方法是，使用前节的概念，用平移正交离散小波变换增补的正交离散小波变换构造一个框架．如果你这样做，因为是冗余的，所以得到的框架称为冗余离散小波变换(RDWT).

基于信号处理结构的标准小波变换由下面三个简单的步骤组成：1）小波变换；2）小波系数的点对点过程(例如，对于去噪的阈值、压缩的量化)；3）逆小波变换．结构图如图 7-25 所示．因为小波变换不是平移不变的，所以如果我们平移信号，实现上述过程，并且平移输出返回，那么，对于不同的平移，结果是不同的．因为冗余离散小波变换的框架向量由平移正交离散小波变换基组成，所以如果在上述结构中，用正/逆冗余离散小波变换代替正/逆小波变换，那么在图 7-26 中方案的结果与所有使用具有输入数据不同平移的离散小波变换处理结果的平均相同．这是基于冗余离散小波变换信号处理趋于更健全的原因之一．

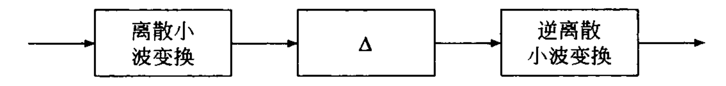


图 7-25　基于信号处理结构的标准小波变换(Δ 表示逐点过程)

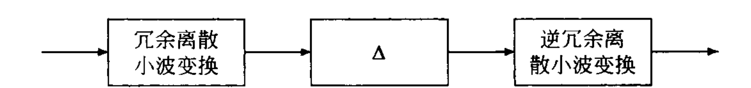


图 7-26　基于信号处理结构的标准冗余小波变换(Δ 表示逐点过程)

另外观察这种新变换可以用 Mallat 引入的在第 5 章和第 8 章中描述的滤波器组得到．在图 3-3 和图 3-6 中所示的离散小波变换滤波器组可以用除去每级之间的抽取来修改，以给出信号的紧框架展开(冗余离散小波变换)的系数．我们称这种结构为非抽取滤波器组．注意，如果没有抽取，那么在离散小波变换中项的数目大于 N. 然而，因为这是在新的超完全框架中的展开系数，所以这是一致的．还注意到这种思想可以以同样的方法应用于 M 带小波和小波包．

这些冗余离散小波变换不是一个严格的紧框架，因为每个尺度具有一个不同的冗余．然而，除了这个因子外，冗余离散小波变换和非抽取的滤波器组有相同的紧框架的特征，并且它们支持帕塞瓦尔定理或能量划分的一种形式．

如果使用这个修改的紧框架作为字典，选择一个特殊的展开向量的子集作为一个新的框架或一组基，那么可以调整系统以适合信号或信号类．这将在下一节关于自适应系统中讨论．

冗余离散小波变换的这个概念是由 Mallat[Mal91]、Beylkin[Bey92]、Shensa[She92]、

Dutilleux[Dut89]、Nason[NS95]、Guo[Guo94, Guo95]、Coifman 以及其他人提出的．这个冗余依赖于算法复杂性是 $O(N\log(N))$ 而不是 $O(N)$ 的新的冗余离散小波变换．Liang 和 Parks[LP94b, LP94a]、Bao 和 Erdol[BE94, BE93]、Marco 和 Weiss[MWJ94, MW94b, MW94a]、Daubechies[Dau92]和其他作者[PKC96]已经使用某种平均形式或"最优基"变换以得到平移不变性．

近期的结果指出，非抽取的离散小波变换与阈值一起，可能是最好的去噪方法[DJKP95b, DJKP95a, LGO*95, CD95b, LGOB95, GLOB95, LGO*96, Guo95]. 非抽取的离散小波变换是平移不变的，它很少受噪声、量化以及误差影响，并且存储和计算复杂性阶是 $N\log(N)$ 的．它与阈值相结合对于某些例子给出比经典的 Donoho 方法好的去噪和压缩方法．使用冗余离散小波变换的进一步的讨论在 10.3 节中给出．

7.6.4 框架和基的自适应构造

在刚刚描述的冗余离散小波变换的情形中，一个超完全展开系统以作为是一个紧框架的方式构造．这允许用一个简单的线性平移不变的系统描述一类范围宽广的信号，而且，这种描述适应信号的特性．近来在构造自适应展开系统方面的研究已经取得很多成果，给出了高度稀疏性和超分辨，但是却增加计算量并且系统是非线性的．本节介绍在这个领域中的一些近期结果[MZ93, DJ94a, CD94, CD95a].

132 ≀ 133

当利用自适应典型结果给出一个平移不变正交变换时，它是非线性的．它具有性质 $\mathrm{DWT}\{af(x)\}=a\mathrm{DWT}\{f(x)\}$，但是它不满足叠加原理，即 $\mathrm{DWT}\{f(x)+g(x)\}\neq\mathrm{DWT}\{f(x)\}+\mathrm{DWT}\{g(x)\}$. 这有时是一个问题．

因为这些有限维的超完全系统是一个框架，展开向量的一个子集可以选择作为一组基，而保持框架的大多数需要的性质．这是在[CD94, CD95a]中由 Chen 和 Donoho 叙述的. 这些方法简述如下：

- 框架的方法(MOF)首先是由 Daubechies[Dau88b, Dau90, Dau92]描述的，并且使用一种直接的思想，通过最小化 α 的 L^2 范数，在(7.83)中解(方程的不确定集的)超完全框架这种方法．事实上，这是解范数方程或使用广义逆的经典定义之一. 这可以用`a = pinv(X) * y`在 MATLAB 中做到．这给出一个框架解，但它一般不是稀疏的．
- 最优正交基方法(BOB)是由 Coifman 和 Wickerhauser[CW92, DJ94a]提出的，以从一个大的集合自适应地选择一组最优基．这种方法是快速的(阶 $N\log N$)但是不必是稀疏的．
- Mallat 和 Zhang[MZ93]给出了一种序列选择方法，称为*匹配追踪*(matching pursuit, MP)，这建立了向量到向量的一组基．算法的有效性依赖于添加向量的次序．如果得到不好的选择，那么它取许多项修正它们．通常，这种方法也不给出稀疏表示．
- 称为基追踪(BP)的一种方法是由 Chen 和 Donoho[CD94, CD95a]提出的，它解

(7.83)而极小化 α 的 L^1 范数. 这是用线性规划实现的，并且得到一个全局最优解. 它在理论上类似于框架方法，但是使用 L^1 范数，而不是 L^2 范数，并且使用线性规划得到最优解. 使用内点方法，这是合理有效的，并且一般地给出一个十分稀疏的解.

- Krim 等在[KMDW95]中描述了一种最优基方法. Tewfik 等在[NAT96]中提出了一种称为最优子集选择的方法，而其他的方法在[BM95, Cro96]中给出.

所有这些方法是很简单的且和问题相关的，并且，在某些情形下，可以给出比基于标准的 M 带或小波包方法更好的结果.

7.7 局部三角函数基

直到现在为止，所有的展开系统都需要(1.5)的平移和伸缩性质，并且满足(2.13)的多分辨分析的假定. 由此，我们可以生成具有紧支撑的基函数的正交基系统，并且推广到 M 带小波和小波包，我们可以允许一种相当一般的具有灵活的频率分辨的时-频或时间-尺度平面的花砖.

通过放弃多分辨分析的要求，我们可以建立另一个具有一种时-频花砖的基系统，有点像小波或小波包系统的对偶. 像我们看到的，多分辨系统对于 $M=2$ 系统以一个对数的间距分频带，并且对于比较高的 M 的情形是以一个线性间矩分频带，对于小波包的推广形式，为了得到更灵活的时-频平面时间分段，现在将讨论**局部余弦**和**局部正弦基系统**. 通过建立时变小波系统而不是修改多分辨分析系统，我们将放弃多分辨分析，并且直接建立一组基. [134]

寻找信号或函数的一种展开，形如

$$f(t) = \sum_{k,n} a_k(n)\chi_{k,n}(t), \tag{7.88}$$

其中函数 $\chi_{j,k}(t)$(作为例子)形如

$$\chi_{k,n}(t) = w_k(t)\cos(\alpha\pi(n+\beta)t+\gamma), \tag{7.89}$$

这里，$w_k(t)$是给出基函数局部化的一个窗函数，并且 α，β 和 γ 是常数，后面将简要给出这些常数的选择. k 是时间指标，而 n 是频率指标. 通过要求这些基函数的正交性，(变换)系数可以用内积

$$a_k(n) = \langle f(t), \chi_{k,n}(t)\rangle = \int f(t)\chi_{k,n}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7.90}$$

求出. 现在，我们检验这怎样可以达到和展开的性质是什么.

基本上，小波包系统分解 $L^2(\mathbf{R})$为正交空间的直和，每个这样的空间通常包括某一频带，并且由小波包系统中一个特殊的元素的平移张成. 具有灵活的频率分辨的小波包时-频花砖是可能的. 然而，现实的分辨是由与小波包中特殊的元素相关的频带决定的.

局部三角函数基[Wic95, AWW92]在下述意义上是小波包的对偶，这些基给出了灵活的现实分辨．在这种情形下，$L^2(\mathbf{R})$分解为空间的直和，每个这样的空间通常包括一个特定的时间区间．基函数是一个固定窗函数的所有调制．

我们可以讨论，一个明显的途径是划分时间轴为邻接的段，并且在每个现实的段上使用傅里叶级数展开．然而，因为基函数是“矩形窗”展开，它们在段的边界上是不连续的，并且因此在光滑信号的分析中是不合乎需要的．如果用一个“光滑窗”代替矩形窗，那么，因为光滑函数的乘积是光滑的，我们可以生成光滑的窗口指数基函数．例如，如果均匀地划分时间轴，对于某个光滑的窗函数 $w(t)$，我们可以得到形如$\{w(t-k)e^{i2\pi nt}\}(k, n\in\mathbf{Z})$的基函数．但是，规范正交性不允许函数 $w(t)$在时间上或在频率上很好地集结，这对于时频分析是不可取的．更准确地，Balian-Low 定理(见[Dau92]第 108 页)叙述了 g 的 Heisenberg 积(时间范围与频率范围的乘积，由 Heisenberg 测不准原理知，它是有界的)是无限的．然而，窗口三角函数基(使用余弦函数和正弦函数，但不是指数函数)可以是规范正交的，并且窗可以具有有限的 Heisenberg 积[DJJ]．这就是我们寻找形如(7.89)给出的局部三角函数基的原因．

135

7.7.1 非光滑局部三角函数基

为构造局部三角函数基，选择：(a)窗函数 $w_k(t)$；(b)三角函数(即在方程(7.89)中的 α, β 与 γ)．如果使用矩形窗(我们知道这不是一种好的选择)，那么只要对于窗跨越的区间找到一组三角函数基就可以了．不失一般性，考虑单位区间(0, 1)，因此考虑 $L^2((0, 1))$的三角函数基．容易看到，下述四组函数满足这个要求．

1. $\{\phi_n(t)\}=\left\{\sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right\}$, $n\in\{0, 1, 2, \cdots\}$;
2. $\{\phi_n(t)\}=\left\{\sqrt{2}\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right\}$, $n\in\{0, 1, 2, \cdots\}$;
3. $\{\phi_n(t)\}=\{1, \sqrt{2}\cos(\pi nt)\}$, $n\in\{1, 2, \cdots\}$;
4. $\{\phi_n(t)\}=\{\sqrt{2}\sin(\pi nt)\}$, $n\in\{0, 1, 2, \cdots\}$.

事实上，这些规范正交基由在(-2, 2)上(前两个)和(-1, 1)上(后两个)的傅里叶级数通过适当地强加对称性得到，因此容易验证它们在(0, 1)上是完备的和规范正交的．如果选择非重叠的矩形窗函数 $w_k(t)$，使得 $\sum_k w_k(t)=1$ 对于所有 $t\in\mathbf{R}$ 成立，并且定义 $\chi_{k,n}(t)=w_k(t)\phi_n(t)$，那么，对于上述 $\phi_n(t)$的四种选择中的每一个，$\{\chi_{k,n}(t)\}$都是 $L^2(\mathbf{R})$的一组局部三角函数基．

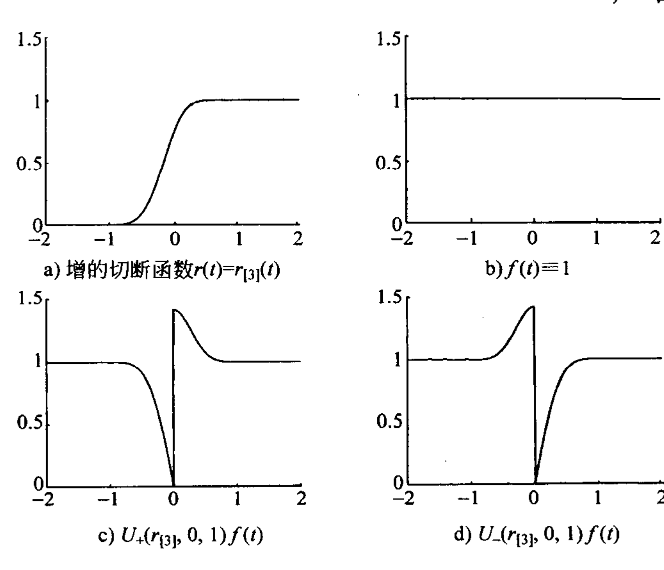
7.7.2 光滑窗的构造

我们知道对于邻接的时间段或区间如何构造规范正交三角函数基．现在，当应用余弦和正弦函数的一些规范正交性时，我们需要构造光滑的窗函数．过程的要点如下：一个酉算子应用于“伸展”在每个时间段的边界上所有局部基函数的不连续性．伸展导致重叠(伸

展)的基函数．然而，因为伸展是酉的，所以得到的函数仍然形成一组规范正交基．伸展算子是用满足一个(使得算子为酉的)代数约束的函数 $r(t)$ 参数化．得到的基函数的光滑性依赖于函数 $r(t)$ 的光滑性．

函数 $r(t)$ 称为增的切断(rising cutoff)函数，满足下述条件(见图 7-27)：

$$|r(t)|^2+|r(-t)|^2=1,\quad 对所有 t\in\mathbf{R};\quad r(t)=\begin{cases}0, & 若 t\leqslant -1\\ 1, & 若 t\geqslant 1\end{cases}\tag{7.91}$$



a) 增的切断函数$r(t)=r_{[3]}(t)$　b) $f(t)\equiv 1$　c) $U_+(r_{[3]},0,1)f(t)$　d) $U_-(r_{[3]},0,1)f(t)$

图 7-27

$r(t)$ 称为增的切断函数，是因为在区间[-1, 1]上它由 0 增到 1(注意，不必单调增). 用 $r(t)$ 乘一个函数，就局部化它到[-1, ∞]. 满足(7.91)的每个实值函数 $r(t)$ 形如 $r(t)=\sin(\theta(t))$，其中

$$\theta(t)+\theta(-t)=\frac{\pi}{2}\quad 对所有 t\in\mathbf{R};\quad r(t)=\begin{cases}0, & 若 t\leqslant -1.\\ \frac{\pi}{2}, & 若 t\geqslant 1.\end{cases}\tag{7.92}$$

这保证 $r(-t)=\sin(\theta(-t))=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta(t)\right)=\cos(\theta(t))$，所以 $r^2(t)+r^2(-t)=1$. 我们可以容易地构造任意光滑的增的切断函数．我们由[Wic95](第 105 页)给出这样一种方法. 从函数

$$r_{[0]}(t)=\begin{cases}0, & 若 t\leqslant 1\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}(1+t)\right), & 若 -1<t<1\\ 1, & 若 t\geqslant 1\end{cases}\tag{7.93}$$

出发，容易验证这是一个增的切断函数．现在，递推定义 $r_{[1]}(t)$，$r_{[2]}(t)$，…如下：

$$r_{[n+1]}(t) = r_{[n]}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right). \tag{7.94}$$

注意到对于每个 n，$r_{[n]}(t)$是一个增的切断函数．进而，对 n 进行归纳容易证明 $r_{[n]}(t) \in C^{2^n-1}$(只要证明在 $t=-1$ 和 $t=1$ 的导数存在并且有直到 2^n-1 阶的零点)．

7.7.3 折叠和伸展

使用增的切断函数 $r(t)$，定义折叠算子 U 和它的逆伸展算子 $U^\star$ 如下：

$$U(r)f(t) = \begin{cases} r(t)f(t) + r(-t)f(-t), & 若\ t > 0 \\ r(-t)f(t) - r(t)f(-t), & 若\ t < 0, \end{cases} \tag{7.95}$$

$$U^\star(r)f(t) = \begin{cases} r(t)f(t) - r(-t)f(-t), & 若\ t > 0 \\ r(-t)f(t) + r(t)f(-t), & 若\ t < 0. \end{cases} \tag{7.96}$$

注意到 $U^\star(r)U(r)f(t) = (|r(t)|^2 + |r(-t)|^2)f(t) = U(r)U^\star(r)f(t)$，并且 $\|U(r)f\| = \|f\| = \|U^\star(r)f\|$，这表明 $U(r)$是 $L^2(\mathbf{R})$上的酉算子．而且这些算子只在$[-1, 1]$上改变$f(t)$，因为对于 $t\leqslant -1$ 和 $t\geqslant 1$，有 $U(r)f(t)=f(t)=U^\star(r)f(t)$．区间$[-1, 1]$是折叠算子或伸展算子的作用区域(action region)．$U(r)$称为在零上作用的折叠算子(folding operator)，因为对于光滑的f，$U(r)f$在零有不连续性．由 $r(t)$的平移和伸缩，可以定义 $U(r, t_0, \varepsilon)$和 $U^\star(r, t_0, \varepsilon)$，使得折叠和伸展关于 $t=t_0$ 分别具有作用区域$[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$和作用半径 ε．

注意(7.95)和(7.96)没有定义 $U(r)f(0)$和 $U^\star(r)f(0)$，因为不连续性是潜在引入的．在计算中的一个初等练习消除这个不连续性的性质．如果$f\in C^d(\mathbf{R})$，那么 $U(r)f\in C^d(\mathbf{R}\setminus\{0\})$．在 $t=0$，左导数和右导数存在，满足所有的偶阶左导数和所有奇阶右导数(直到并包括 d 阶)都是零．相反，给定任一函数$f\in C^d(\mathbf{R}\setminus\{0\})$，它具有上述的不连续性，$U^\star(r)f$有一个唯一跨过 $t=0$ 的外延(即，对于$(U^\star(r)f)(0)$选择一个值)并且属于 $C^d(\mathbf{R})$．在(7.95)和(7.96)中转换符号，以得到另一组折叠算子和伸展算子．在此情形下，对于$f\in C^d(\mathbf{R})$，$U(r)f$将使它的偶阶右导数和奇阶左导数等于零．我们将分别使用 U_+，$U_+^\star$和 U_-，$U_-^\star$以区别两种类型的折叠算子和伸展算子，并且分别称它们是正的极性和负的极性折叠/伸展算子．

目前我们已经看到，折叠算子与一个增的切断函数有关，在某一个点上作用，有一个确定的作用区域和作用半径，并且有确定的极性．为得到这些算子做什么的定性理解，我们看一些例子．

首先，考虑一种情形，其中$f(t)$在作用区间上关于折叠点是偶对称的或奇对称的．那么，Uf相当于用一个适当的窗函数简单地开窗．事实上，如果在$[-1, 1]$上，$f(t)=f(-t)$，那么

$$U_+(r,0,1)f(t) = \begin{cases}(r(t)+r(-t))f(t), & 若\ t>0,\\ (r(-t)-r(t))f(t), & 若\ t<0,\end{cases} \tag{7.97}$$

并且如果在[-1, 1]上，$f(t) = -f(-t)$，那么

$$U_+(r,0,1)f(t) = \begin{cases}(r(t)-r(-t))f(t), & 若\ t>0,\\ (r(-t)-r(t))f(t), & 若\ t<0.\end{cases} \tag{7.98}$$

136～138

图 7-27 表明一个增的切断函数和在常数函数上极性的折叠算子的作用．观察在 $t=0$ 的不连续性，以及极性反转的作用．

我们看到，在作用区域中对于具有对称性的信号折叠，相当于开窗．下面看一看支撑于折叠点的右边(或左边)的信号，并且看一看伸展对它们的作用．在此情形下，$U_+^\star(r)(f)$ 用 $f(t)$ 关于折叠点的偶(或奇)外延开窗得到．事实上，如果 $f(t)=0$，$t<0$，那么

$$U_+^\star(r,0,1)f(t) = \begin{cases}r(t)f(t), & 若\ t>0,\\ r(t)f(-t), & 若\ t<0,\end{cases} \tag{7.99}$$

并且如果 $f(t)=0$，$t>0$，那么

$$U_+^\star(r,0,1)f(t) = \begin{cases}--r(-t)f(-t), & 若\ t>0,\\ r(-t)f(t), & 若\ t<0,\end{cases} \tag{7.100}$$

图 7-28 表明正伸展算子作用于支撑分别在右半直线和左半直线上的余弦函数和正弦函数上的效果．注意，伸展除去了在 $t=0$ 的不连续性．如果极性是相反的，那么在半直线上对信号的影响是转换的，右半直线依赖于窗的奇外延，并且左半直线依赖于窗的偶外延．

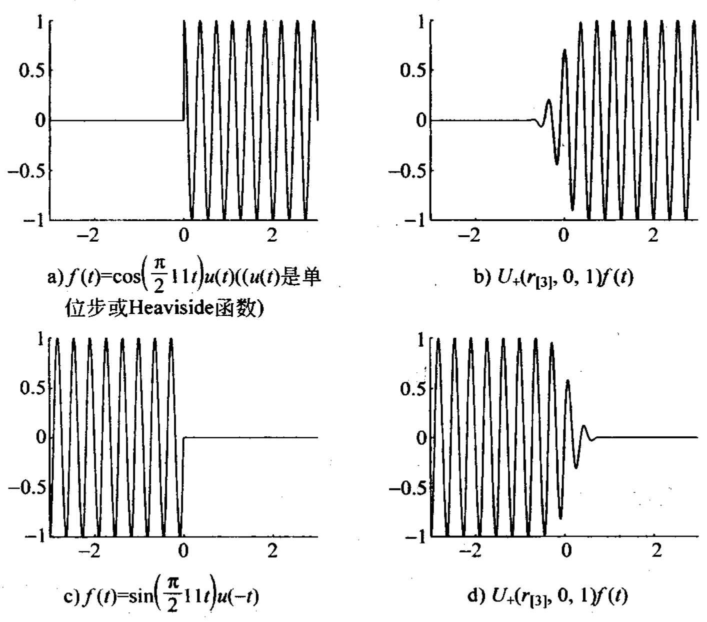


图 7-28 在半直线上的折叠函数的支撑

7.7.4 局部余弦基和局部正弦基

对于 $L^2((0,1))$，前面描述的四组规范正交基为

1. $\{\phi_n(t)\}=\left\{\sqrt{2}\cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right\}$，$n\in\{0,1,2,\cdots\}$；

2. $\{\phi_n(t)\}=\left\{\sqrt{2}\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right\}$，$n\in\{0,1,2,\cdots\}$；

3. $\{\phi_n(t)\}=\{1,\sqrt{2}\cos(\pi nt)\}$，$n\in\{1,2,\cdots\}$；

4. $\{\phi_n(t)\}=\{\sqrt{2}\sin(\pi nt)\}$，$n\in\{0,1,2,\cdots\}$.

这些基函数在 $t=0$ 和 $t=1$ 有不连续性，因为它们用矩形窗限制余弦和正弦于单位区间上．这些基函数到 $t\in\mathbf{R}$ 的自然外延(即不开窗函余弦和正弦)是关于端点 $t=0$ 和 $t=1$ 的或者(局部)偶(记为"+")对称，或者(局部)奇(记为"−")对称．事实上，在(0，1)上，四种情形的基函数分别是(+，−)，(−，+)，(+，+)和(−，−)对称的．由前面的分析，这是指，如果伸展算子具有右极性，那么伸展的这些基函数相应于开窗．还注意到，基函数在端点是不连续的．进而，依赖于在每个端点的对称性，所有("+"对称的)奇阶导数或("−"对称的)偶阶导数是零．对于这四组基，用在(具有非重叠的作用区域的)端点选择适当极性的伸展算子，我们得到紧支撑的光滑基函数．例如，对于(+，−)对称，基函数 $U_+(r_0,0,\varepsilon_0)U_+(r_1,1,\varepsilon_1)\psi_n(t)$ 支撑在 $(-\varepsilon_0,1+\varepsilon_1)$，并且是多次连续可微的，如 r_0 次和 r_1 次．

令 $\{t_j\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中点的一个有序集，它定义一个划分为邻接的区间 $I_j=[t_j,t_{j+1}]$. 现在，对于每个区间选择上述四组基之一，使得在 t_j 基函数对于 I_{j-1} 和 I_j 具有相反的对称性．我们说，在 t_j 的极性是正的，如果对称性是 −)(+，并且在 t_j 的极性是负的，如果对称性是 +)(−. 在每个 t_j 选择一个光滑的切断函数 $r_j(t)$ 和作用半径 ε_j，使得作用区间不重叠．令 $p(j)$ 是 t_j 的极性并且定义酉算子

$$U^\star=\prod_j U^\star_{p(j)}(r_j,t_j,\varepsilon_j).\tag{7.101}$$

令 $\{\psi_n(t)\}$ 表示所有区间放置一起的所有基函数．那么 $\{\psi_n(t)\}$ 对于 $L^2(\mathbf{R})$ 形成一组非光滑的规范正交基．同时，$\{U^\star\psi_n(t)\}$ 还形成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组光滑的规范正交基．为在这组基下求得函数 $f(t)$ 的展开系数，我们使用

$$\langle f,U^\star\psi_n\rangle=\langle Uf,\psi_n\rangle.\tag{7.102}$$

换句话说，为在新的(光滑)基下计算 f 的展开系数，我们仅仅折叠 f 到 Uf，并且关于原来的基求它的展开系数．这允许我们利用适用于在原来基上系数计算的快速算法．

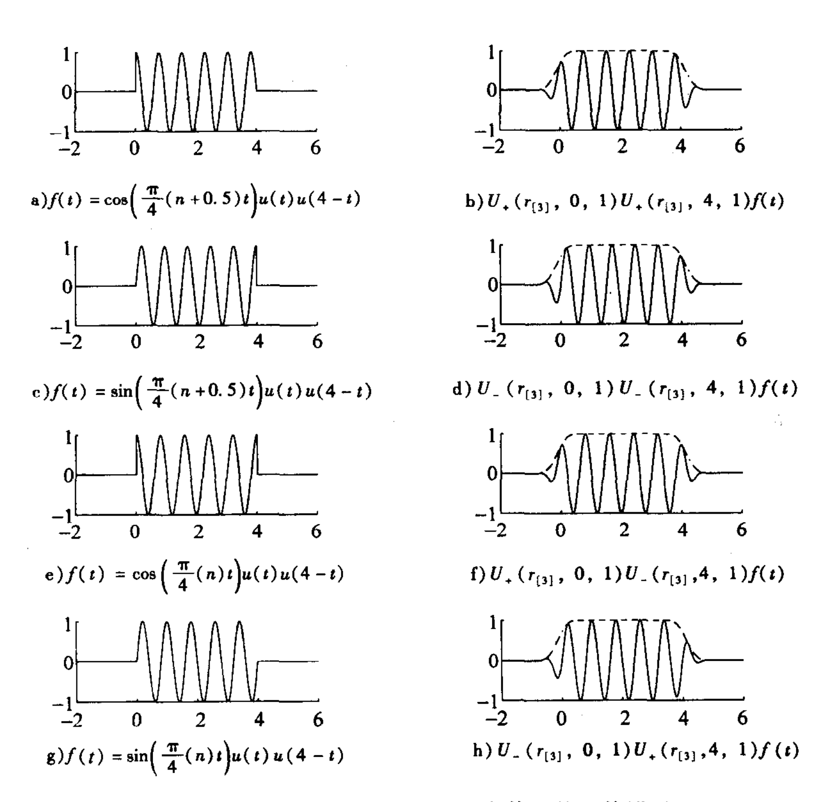
139 ~ 140

所以，对于在端点 t_j 上任意选择的极性，我们有光滑的局部三角函数基．特别地，对于所有 t_j，选择极性是正的(在所有区间上由选择第一种基组成)，我们得到局部余弦基．如果对于所有 t_j 极性是负的(在所有区间上由选择第二种基组成)，我们得到局部正弦基．交替的选择极性(在所有区间上由交替选择第三种和第四种基组成)，因此得到交替的余

弦/正弦基．

所有这些基可以用抽样的余弦/正弦基函数在离散时间上构造[Wic95]．在离散时间上局部余弦基最初是由 Malvar 构造的，并且有时称为重叠正交变换[Mal92]．在离散的情形中，在折叠之后可以利用(使用 DCT I-IV 和 DST I-IV)的三角变换有效实现．在此情形下，局部三角函数基中的展开相应于在预处理(或折叠)信号之后计算一个 DCT.

对于在四种情形每一种中的一个抽样基函数，图 7-29 展示在伸展后相应的光滑基函数．注意到，对于局部余弦基和局部正弦基，基函数不是线性相位的，而窗是对称的，窗函数不是对称的．然而，对于交替的正弦/余弦基，(伸展的)基函数是线性相位的．在局部正弦(或余弦)基与调制滤波器组之间有一种联系，这些滤波器组不具有线性相位(在第 8 章中讨论)．所以在交替的余弦/正弦基与线性相位调制滤波器组(再见第 8 章)之间也有一种联系，这种联系在[Gop96a]中进一步讨论了．



a) $f(t)=\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+0.5)t\right)u(t)u(4-t)$　b) $U_+(r_{[3]},0,1)U_+(r_{[3]},4,1)f(t)$

c) $f(t)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+0.5)t\right)u(t)u(4-t)$　d) $U_-(r_{[3]},0,1)U_-(r_{[3]},4,1)f(t)$

e) $f(t)=\cos\left(\frac{\pi}{4}(n)t\right)u(t)u(4-t)$　f) $U_+(r_{[3]},0,1)U_-(r_{[3]},4,1)f(t)$

g) $f(t)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(n)t\right)u(t)u(4-t)$　h) $U_-(r_{[3]},0,1)U_+(r_{[3]},4,1)f(t)$

图 7-29　三角函数基函数——在伸展前和伸展后

局部三角函数基已经应用于许多信号处理问题．例如，它们已经用于自适应谱分析和谈话语音区与无语音区分段．它们还用于图像压缩，并且是文献中著名的重叠正交变

换[Mal92].

7.7.5 信号自适应局部三角函数基

在7.3节描述的自适应小波包分析中，我们考虑了一棵分解的完全滤波器组树，并且对于一个给定的信号使用一些算法(例如，最优基算法)修剪树以得到最好树拓朴(等效的频率划分). 这里概念是类似的. 我们划分时间轴(或区间)为片，并且继续加细划分每片，给出时间轴(或区间)的一棵划分树. 如果在一棵完全的或者修剪的树的每个叶子上使用光滑局部三角函数基，那么在时间轴(或区间)上对于所有信号得到一组光滑基. 在自适应局部基中，我们生长一棵完全树，并且基于一些准则修剪它，以得到时间片的最优集合.

图7-30图解地表明相应于一组特殊局部三角函数基的一个样品时-频花砖. 注意到，这是一个小波包花砖的对偶(见图7-15)——在此意义下，我们可以在两个之间转换时间轴和频率轴.

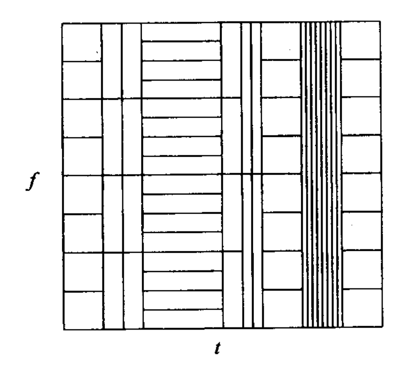


图7-30 局部基

7.8 离散多分辨分析、离散时间小波变换和连续小波变换

到目前为止，我们讨论了使用称为离散小波变换的小波方法展开连续时间信号为小波级数，这或许应该称为连续时间小波级数. 这种小波展开类似于傅里叶级数，在这两种级数展开中，它们变换连续时间信号为一个离散系数序列. 然而，不像傅里叶级数，离散小波变换可以是周期的或非周期的，所以离散小波变换有更多的用途，更实用.

在本章中，对于以一种级数展开方式展开的离散时间信号，我们将给出一种小波方法，因为在大多数实际的情形中，信号已经是离散抽样的形式. 其实，我们已经讨论了，什么时候可以使用信号抽样作为尺度函数展开系数，以便使用Mallat算法的滤波器组实现. 这里，我们求得离散小波变换和离散时间小波变换之间的一种本质的联系，像傅里叶级数和离散傅里叶变换之间的联系那样. 我们用傅里叶级数展开信号，但是通常用离散傅里叶变换实现.

为进一步推广离散小波变换，我们还将简要地给出类似于傅里叶变换的连续小波变换，它把一个连续时间函数变换为具有连续尺度和平移的一种表示. 为了讨论这些小波表示的特征，我们将经常类比于相应的傅里叶表示. 然而，重要的是了解傅里叶方法与小波方法之间的不同. 主要的不同是与小波集中于时间和尺度或频率两方面、傅里叶基的周期性质以及小波基的选择有关.

7.8.1 离散多分辨分析和离散时间小波变换

类似于前面章节关于多分辨分析的讨论，我们可以对于 l_2 定义一个离散多分辨分析(discrete multiresolution analysis，DMRA)，其中基函数是离散序列[Rio93b，Rio93a，VK95].借助于离散时间基函数，展开一个离散时间信号，形式类似于(1.8)为

141～143

$$f(n) = \sum_{j,k} d_j(k)\psi(2^j n - k) \tag{7.103}$$

其中 $\psi(m)$ 是整数变量 m 的基本展开函数．如果这些展开函数是一组正交基(或形成一个紧框架)，那么展开系数(离散时间小波变换)由如下内积求得：

$$d_j(k) = \langle f(n), \psi(2^j n - k)\rangle = \sum_n f(n)\psi(2^j n - k). \tag{7.104}$$

如果展开函数不是正交的，或者还是无关的但张成 l^2，那么一个双正交系统或一个框架可以形成使得可以定义一个变换和逆变换．

因为没有基本的连续时间尺度函数或小波，在第1，2，6等章中使用离散小波变换分析的许多问题、性质以及特征不出现．事实上，因为对于计算离散时间小波变换的滤波器组结构，设计常常使用多级频域技术，例如，Smith 和 Barnwell 等人[AS96]. 小波零矩的问题由 Daubechies 提出，这涉及滤波器组迭代收敛的概念，并且 Coifman 的尺度函数零矩已证明是用抽样帮助逼近内积，这似乎没有离散时间小波变换解释．

离散时间小波变换和离散小波变换之间的关系是：

- 如果初始序列是在很细的尺度上连续多分辨分析的尺度系数，那么，离散多分辨分析生成与连续多分辨分析在二进有理数上同样的系数．
- 当尺度大时，离散多分辨分析的基序列以形状收敛于连续多分辨分析基函数．

离散时间小波变换或离散多分辨分析通常用矩阵算子描述．如果变换是周期的，像傅里叶级数或离散傅里叶变换那样，这是特别容易的．对于离散时间小波变换，一个矩阵算子能给出输入向量与得出的输出向量之间的关系．这种方法的若干参考文献在[RW97，HRW92，KT94a，KT93，RGN94，RG95，KT94b，Kwo94]中．

7.8.2 连续小波变换

在7.6节中冗余离散小波变换的自然推广是连续小波变换(continous wavelet transform，CWT)，它将连续时间信号变换为一个小波变换，这个小波变换是一个连续位移或平移和一个连续尺度的函数．这个变换类似于傅里叶变换，它是冗余的，并且导致前面解释的变换是平移不变的，这对于时间-频率/尺度分析是有价值的．[HW89，GKM89，You80，RD92，Dau92，VK95，Rio91].

连续小波变换的定义借助于小波 $w(t)$ 用

$$F(s,\tau) = s^{-1/2}\int f(t)\, w\left(\frac{t-\tau}{s}\right)\mathrm{d}t \tag{7.105}$$

给出，其中逆变换是

144

$$f(t) = K\iint \frac{1}{s^2}F(s,\tau)w\left(\frac{t-\tau}{s}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{7.106}$$

而规范化常数用

$$K = \int \frac{|W(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega \tag{7.107}$$

给出，其中 $W(\omega)$ 是小波 $w(t)$ 的傅里叶变换．为了小波是容许的（admissible）（为了（7.106）成立），$K<\infty$．在大多数情形下，这仅要求 $W(0)=0$ 并且 $W(\omega)$ 趋于零（$W(\infty)=0$）快得足以使得有 $K<\infty$．

这些容许性条件由一个很大的函数集合满足，并且很少给出应该使用什么样的基小波函数．在大多数情形下，对于感兴趣的信号类，选择小波 $w(t)$ 以在时间与尺度两方面给出好的能量局部化．尽可能有效地计算连续小波变换的抽样也是很重要的，这通常用离散小波变换和 Mallat 滤波器组或快速傅里叶变换计算．这些和连续小波变换的解释在[Dau92，VK95，Gop90，GB90，PP89，GKM89，JB82，RD92，VLU97]中讨论．

连续小波变换的使用是更一般的时-频分析的一部分，时-频分析可以使用小波或不使用小波[Coh89，Coh95，HB92，Boa92，LP89]．

7.8.3 傅里叶系统和小波系统之间的相似性

为了更好地理解小波变换和小波展开，我们看看各种形式的傅里叶变换和傅里叶展开．如果用 CT 表示连续时间，用 DT 表示离散时间，用 CF 表示连续频率，用 DF 表示离散频率，下面的表 7-4 展示离散傅里叶变换（DFT）、傅里叶级数（FS）、离散时间傅里叶变换（DTFT）和傅里叶变换（FT）取作时域的信号，并产生频域的变换或级数．例如，傅里叶级数取一个连续时间输入信号，产生一个离散频率系数序列，而离数时间傅里叶变换取一个离散时间数列作为输入信号，并且产生一个变换，这个变换是连续频率的函数．

表 7-4 四种傅里叶变换的连续和离散的输入与输出

	DT	CT
DF	DFT	FS
CF	DTFT	FT

因为所有四种傅里叶变换的基函数是周期的，所以一个周期信号的（连续或者离散）变换是一个离散频率的函数．换句话说，它是级数展开系数的一个序列．如果信号是无限长的，并且不是周期的，那么变换是一个连续频率的函数，而逆变换是一个积分，不是一个和．

时间周期的⇔频率离散的

频率周期的⇔时间离散的

或许参考关于信号处理和傅里叶方法的适当材料会使这更清楚，并且可以表明为什么傅里叶分析的许多性质是由周期的基函数建立．

145

在大多数情形中，它是需要的傅里叶变换、离散时间傅里叶变换或者傅里叶级数，但是它是能用数字计算机计算的离散傅里叶变换，并且可能使用快速傅里叶变换算法．如果傅里叶级数的系数快速地下降，甚至更好地在某个谐波之后是零，那么信号抽样的离散傅里叶变换将给出傅里叶级数的系数．如果离散时间信号有有限的非零的段，那么它的值的

离散傅里叶变换将是它的离散时间傅里叶变换的抽样．由此，我们看到信号的抽样与信号的关系以及不同的傅里叶变换的关系．

现在，对于各种小波变换这种情形是什么呢？这既有类似也有差别．下面的表7-5给出了连续变量与离散变量的关系，其中离散小波(DW)用j和k表示尺度和平移的离散值，而连续小波(CW)表示尺度和平移的连续值．

本书大部分讨论了离散小波变换，它是一个连续时间信号的级数展开．因为小波基函数是时间集中的，并且是非周期的，离散时间小波变换和离散小波变换都表示无限长的信号．在大多数实际情况下，使它们周期化以便进行有效计算．第9章给出怎样使变换是周期的详细讨论．离散时间连续小波变换很少使用，所以这里不讨论．

表7-5　四种小波变换的连续和离散的输入与输出

	DT	CT
DW	DTWT	DWT
CW	DTCWT	CWT

各种变换的命名在文献中没有一致性，并且由于小波变换有两个变换变量——尺度和平移，这就变得复杂了．如果我们重新命名所有变换，那么这将对于级数展开更一致地使用傅里叶级数(FS)或小波级数(WS)，产生离散展开系数，对于积分展开更一致地使用傅里叶变换(FT)或小波变换(WT)，产生连续频率或尺度或平移变量的函数与离散时间或者连续时间一起，描述输入信号．然而，在通常的使用中，只有离散时间傅里叶变换遵循这个公式．

表7-6　变换的连续和离散、周期和非周期的输入与输出

通常名	一致名	时间C或D	变换C或D	输入是周期的	输出是周期的
FS	CTFS	C	D	Yes	No
DFT	DTFS	D	D	Yes	Yes
DTFT	DTFT	D	C	No	Yes
FT	CTFT	C	C	No	No
DWT	CTWS	C	D	Y或N	Y或N
DTWT	DTWS	D	D	Y或N	Y或N
—	DTWT	D	C	N	N
CWT	CTWT	C	C	N	N

146

离散小波变换和离散时间小波变换之间的不同在于，输入到离散小波变换的是一个展开系数的序列，或者一个内积的序列，而输入到离散时间小波变换的是信号本身，可能是连续时间信号的抽样．Mallat算法或滤波器组结构恰好是相同的．比较好的逼近是用尺度函数的零矩(见6.8节)，或用抽样的某种预滤波使它们比较接近内积[SN96]．

如前所述，离散小波变换和离散时间小波变换都能陈述为非周期的、无穷区间信号的一种精确展开的变换，或者它们可以周期化以处理有限长信号或者周期信号．如果使它们是周期的(如在第9章中)，那么在取变换的地方有一个混淆现象．事实上，混淆现象在不同的尺度有一个不同的周期，这可能使解释发生困难．但这不破坏逆变换，它把小波信息用于“无混淆现象”的尺度函数系数．多数(但不是所有的)离散小波变换、离散时间小波变换和矩阵运算使用一种周期化的形式[SV93]．

147

第8章　滤波器组和传输多路复用器

8.1　导　　引

本章借助于与小波系统相关的基本的滤波器组讨论小波系统的性质．这是对第3章中材料的展开和推敲，其中在第5章中由信号展开的观点得到的许多条件和性质，现在由相关的滤波器组导出．Mallat算法使用滤波器和上抽样/下抽样的特殊结构，计算和反转离散小波变换．这样的滤波器结构，在*滤波器组*和*传输多路复用器*（transmultiplexer）问题的数字信号处理中已经研究了30多年[SB86b，Vai87a，VNDS89，VD89，Vet87，VL89，Mal92，Vai92，RC83]．滤波器组理论，除了为小波分析提供了有效的计算方法外，对小波基的构造也是有价值的．事实上，小波理论的一些较细的方向是由滤波器组理论发展而来．

8.1.1　滤波器组

滤波器组是一种将信号分解为一组子信号的结构．根据应用的不同，这些子信号帮助强调原信号的特殊方面，或者可能比原信号更容易处理．根据子信号是否线性地依赖于原信号，我们分成*线性*滤波器组和*非线性*滤波器组．滤波器组原来是在信号压缩环境下研究，其中子信号用于"描述"原信号．子信号（子带信号）是下抽样的，使得数据速率在子带中与在原信号中一样——虽然这不是本质的．关键是子信号传达原信号的显著的性质，并且足以重构原信号．

图8-1给出了一个在信号压缩（子带编码）中使用的线性滤波器组．*分析滤波器*$\{h_i\}$用于滤波输入信号$x(n)$．滤波的信号是下抽样的以给出*子带信号*．原信号的重构由上抽样达到，滤波和相加子带信号如图8-1右边部分所示．想要完全重构（即$y(n)=x(n)$），将一组双线性约束强加于分析滤波器和综合滤波器上（因为在图8-1中所有运算都是线性的）．这还约束下抽样因子M应是子带信号的最大数目，比如说L. 滤波器组设计包括选择滤波器$\{h_i\}$和$\{g_i\}$满足完全重构，并且同时给出信息和有用的子带信号．例如，在子带语言编码中，对于分析滤波器和综合滤波器来说，想要的频率响应如图8-2所示——这是一个很自然的选择，是由人耳对各种频带的非一致敏感性所决定的．

概括地说，滤波器组问题包括满足下述目标的滤波器$h_i(n)$与$g_i(n)$的设计：

1. *完全重构*（即$y(n)=x(n)$）．

2. *有用性*．这明显依赖于应用．对于子带编码的应用，滤波器频率响应可能逼近图8-2中的理想的频率响应．而在其他应用中，滤波器可能必须满足其他的约束或逼近其他的频率响应．

如果图8-1中的信号和滤波器是多维的，那么我们就有多维滤波器组设计问题．

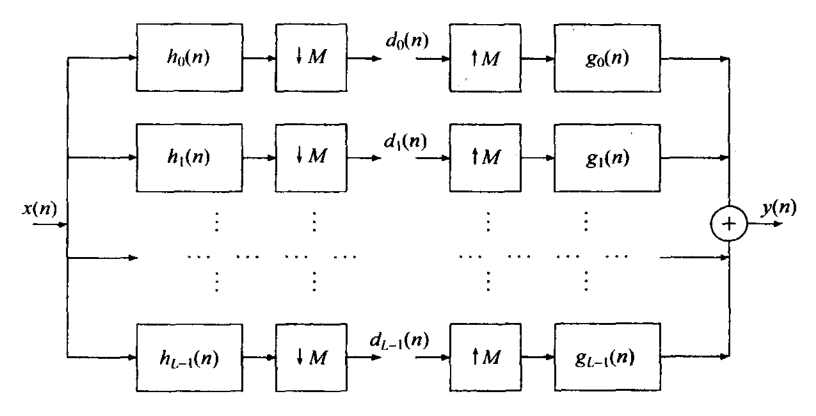


图 8-1 具有 M 的速率变化因子的 L 带滤波器组

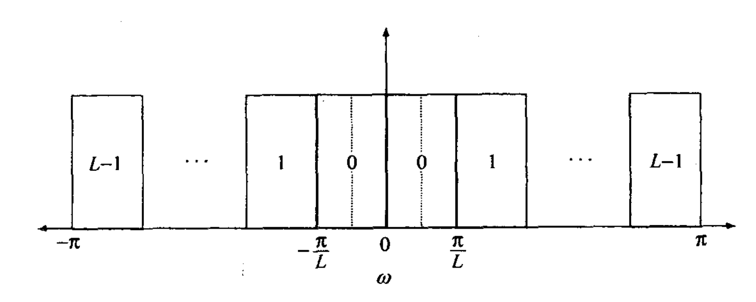


图 8-2 在 L 带滤波器组中的理想频率响应

149

8.1.2 传输多路复用器

传输多路复用器是一种结构，这种结构把一组信号在比较高的速率上结合为单个信号；即，它是一个滤波器组的对偶．如果结合的信号线性地依赖于分量信号，那么我们就有一个线性传输多路复用器．传输多路复用器最初研究的是时域复用(time-domain-multiplexed, TDM)信号到频域复用(frequency domain multiplexed, FDM)信号的转化问题，这种转化应满足在稍后某点再转化成时域复用信号．关键是分量信号能由合并的信号恢复．图 8-3 给出了一个传输多路复用器的结构．输入信号 $y_i(n)$是(用一个综合滤波器组)上抽样、滤波并且合并，以给出一个合成的信号 $d(n)$．信号 $d(n)$可以(用一个分析滤波器)滤波并下抽样给出一组信号$x_i(n)$．传输多路复用器设计的目标是选择滤波器以保证完全重构(即对于所有 i，$x_i(n)=y_i(n)$)．这将双线性约束强加于综合滤波器与分析滤波器上．而且上抽样因子必须至少是输入信号的分量数，比方说 L. 进而，在经典的时域复用-频域复用转换中，分析滤波器和综合滤波器必须逼近在图 8-2 中的理想频率响应．如果输入信号、分析滤波器和综合滤波器是多维的，那么我们有一个多维传输多路复用器．

8.1.3 完全重构——进一步探讨

现在我们进一步探讨一个滤波器组和/或多路复用器的分析滤波器和综合滤波器上的一组双线性约束，这些约束保证完全重构．假定有 L 个分析滤波器和 L 个综合滤波器，并且下抽样/上抽样用同样的整数 M. 概括地说，这些约束能以三种有用的方法观察，每一种适用于某种特殊情形．

1. 直接特征——在小波理论中(特征化规范正交性和框架的性质)，在强有力的一类滤波器组(调制滤波器组)的研究中，等等，这是有用的．

2. 矩阵特征——这在时变滤波器组的研究中是有用的．

3. z 变换域(或多相表示)特征——这在(西)滤波器组和小波的设计与实现中是有用的．

8.1.4 完全重构的直接特征

我们首先考虑完全重构的直接特征，对于滤波器组和传输多路复用器来说，由一个初等叠加论证得到．

定理 38 一个滤波器组是完全重构的，当且仅当对于所有的整数 n_1 与 n_2，有

$$\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{n} h_i(Mn+n_1)g_i(-Mn-n_2) = \delta(n_1-n_2). \tag{8.1}$$

一个传输多路复用器是完全重构的，当且仅当对于所有的 $i, j\in\{0, 1, \cdots, L-1\}$，有

150

$$\sum_{n} h_i(n)g_j(-Ml-n) = \delta(l)\delta(i-j). \tag{8.2}$$

进而，如果通道的数目等于下抽样的因子(即，$L=|M|$)，那么式(8.1)与式(8.2)是等价的．

考虑一个完全重构滤波器组．因为任意的信号都是脉冲的一种线性叠加，只要对于任意的整数 n_1 考虑输入信号 $x(n)=\delta(n-n_1)$ 就足够了．那么(见图 8-1) $d_i(n)=h_i(Mn-n_1)$，所以 $y(n_2)=\sum_i\sum_n g_i(n_2-Mn)d_i(n)$. 而由完全重构知，$y(n_2)=\delta(n_2-n_1)$. 滤波器组完全重构性质是这个事实的精确陈述：

$$y(n_2) = \sum_i\sum_n g_i(n_2-Mn)d_i(n) = \sum_i\sum_n g_i(n_2-Mn)h_i(Mn-n_1) = \delta(n_2-n_1).$$

考虑一个完全重构的传输多路复用器．同样因为线性叠加，只要对于所有 i 和 j 考虑输入信号 $x_i(n)=\delta(n)\delta(i-j)$ 就足够了．那么，$d(n)=g_j(n)$ (见图 8-3)，并且 $y_i(l)=\sum_n h_i(n)d(Ml-n)$. 而由完全重构知，$y_i(l)=\delta(l)\delta(i-j)$. 传输多路复用器完全重构性质是这个事实的精确陈述：

$$y_i(l) = \sum_n h_i(n)d(Ml-n) = \sum_n h_i(n)g_j(Ml-n) = \delta(l)\delta(i-j).$$

附注 直接地说，在证明(8.2)的叠加论证中，我们必须对于任意 n_1 考虑输入信号 $x_i(n)=\delta(n-n_1)\delta(i-j)$. 容易验证，对于所有 n_1，(8.2)一定要满足．

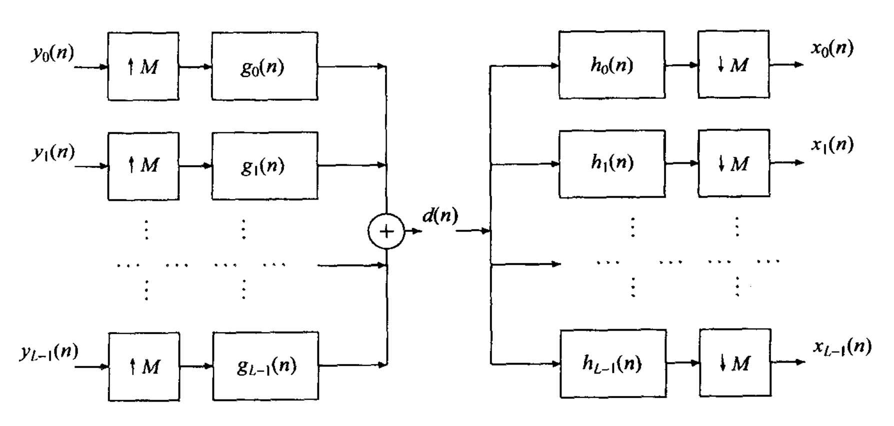


图 8-3 具有 M 的速率变化因子的 L 带传输多路复用器

151

当 $L=M$ 时，式(8.1)和式(8.2)的等价性不能明显地由直接特性得到．然而，我们通过马上将介绍的变换域特征能明显看出这种联系．对于一个完全重构滤波器，组合 L 个带应该包含充足的信息以重构原来的信号(注意，在式(8.1)中关于 i 求和)，而对于一个传输多路复用器，分量带应该满足双正交性约束，使得它们可以由分量信号重构(注意，双正交性条件由式(8.2)给出)．

8.1.5 完全重构的矩阵特征

第二种观点是线性代数的观点，这种观点将所有信号作为向量，并且所有滤波运算作为矩阵-向量相乘[Vet87]．在图 8-1 和图 8-3 中，信号 $x(n)$，$d_i(n)$和 $y(n)$可以自然地分别对应于无穷向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{d}_i$ 和 $\boldsymbol{y}$．例如，$\boldsymbol{x}=[\cdots, x(-1), x(0), x(1), \cdots]$．那么，分析滤波运算可以表示为

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{x} \quad 对于\ i\in\{0,1,2,\cdots,L-1\}, \tag{8.3}$$

其中，对于每个 i，$\boldsymbol{H}_i$ 是由滤波器 h_i 的适当元素组成的矩阵，$\boldsymbol{H}_i$ 是一个块 Toeplitz 矩阵(因为它用保留 Toeplitz 矩阵的每 M 行用 h_i 卷积表示得到)，满足每行以一个指标反转顺序包含 h_i．那么，综合滤波运算可以表示为

$$\boldsymbol{y} = \sum_i \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_i, \tag{8.4}$$

其中，对于每个 i，$\boldsymbol{G}_i$ 是由滤波器 g_i 的适当元素组成的矩阵．$\boldsymbol{G}_i$ 也是一个块 Toeplitz 矩阵(因为它用保留 Toeplitz 矩阵的每 M 行，它的转置用 g_i 卷积表示得到)，满足每行以自然顺序包含 g_i．定义 $\boldsymbol{d}$ 是用交替每个向量 $\boldsymbol{d}_i$ 的元素得到的向量：$\boldsymbol{d}=[\cdots, d_0(0), d_1(0),\cdots, d_{M-1}(0), d_0(1), d_1(1), \cdots]$．还定义矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{G}$(借助于 $\boldsymbol{H}_i$ 和 $\boldsymbol{G}_i$)使得

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}, \quad 和 \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}. \tag{8.5}$$

$\boldsymbol{H}$ 是由交错 $\boldsymbol{H}_i$ 的行得到，并且 $\boldsymbol{G}$ 是由交错 $\boldsymbol{G}_i$ 的行得到．例如，在有限脉冲响应的情形中，如果滤波器的长度都是 N，那么

$$
d = Hx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & h_0(N-1) & \cdots & h_0(N-M-1) & \cdots & h_0(0) & 0 & \\ & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \ddots & h_{L-1}(N-1) & \cdots & h_{L-1}(N-M-1) & \cdots & h_{L-1}(0) & 0 & \ddots \\ & 0 & 0 & h_0(N-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & 0 & 0 & h_{L-1}(N-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} x. \tag{8.6}
$$

152 由这个结论，我们有下述结果：

定理 39 一个滤波器组是完全重构的当且仅当

$$G^{\mathrm{T}} H = I. \tag{8.7}$$

一个传输多路复用器是完全重构的当且仅当

$$H G^{\mathrm{T}} = I. \tag{8.8}$$

进而，当 $L=M$ 时，两个条件是等价的.

对于滤波器组和传输多路复用器，我们还可以用下述形式写完全重构条件，它明确地表明了直接特征和矩阵特征之间的形式上的关系．对于一个完全重构滤波器组，我们有

$$\sum_i G_i^{\mathrm{T}} H_i = I. \tag{8.9}$$

相应地，对于一个完全重构传输多路复用器，我们有

$$H_i G_j^{\mathrm{T}} = \delta(i-j) I. \tag{8.10}$$

8.1.6 完全重构的多相(变换域)特征

我们最后从一种多相表示观点来看一看分析滤波器组和综合滤波器组．这里，输入与输出信号的子序列和滤波器在 z 变换域表示．事实上，借助于信号和滤波器子序列的 z 变换，我们令信号和滤波器的 z 变换表示如下：

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^k X_k(z^M), \tag{8.11}$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^k Y_k(z^M), \tag{8.12}$$

$$H_i(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H_{i,k}(z^M), \tag{8.13}$$

$$G_i(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^k G_{i,k}(z^M), \tag{8.14}$$

那么，沿分析滤波器组的每个分支，我们有

$$D_i(z) = [\downarrow M]\{H_i(z)X(z)\} = [\downarrow M]\left\{\left(\sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H_{i,k}(z)\right)\left(\sum_{l=0}^{M-1} z^l X_l(z^M)\right)\right\}$$

$$= [\downarrow M]\left\{\sum_{k,l=0}^{M-1} z^{l-k} H_{i,k}(z^M) X_l(z^M)\right\}$$

$$= \sum_{k,l=0}^{M-1} \delta(l-k) H_{i,k}(z) X_l(z) = \sum_{k}^{M-1} H_{i,k}(z) X_k(z). \tag{8.15}$$

153

类似地，由综合滤波器组，我们有

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{L-1} D_i(z^M) G_i(z) = \sum_{i=0}^{L-1} D_i(z^M)\left\{\sum_{k=0}^{M-1} z^k G_{i,k}(z^M)\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} z^k \left\{\sum_{i=0}^{L-1} G_{i,k}(z^M) D_i(z^M)\right\}. \tag{8.16}$$

所以(由(8.12))有

$$Y_k(z) = \sum_{i=0}^{L-1} G_{i,k}(z) D_i(z). \tag{8.17}$$

对于 $i \in \{0, 1, \cdots, L-1\}$ 和 $k \in \{0, 1, \cdots, M-1\}$，定义多相(polyphase)分量矩阵 $(H_p(z))_{i,k} = H_{i,k}(z)$ 和 $(G_p(z))_{i,k} = G_{i,k}(z)$. 令 $X_p(z)$ 和 $Y_p(z)$ 表示多相信号 $x_p(n)$ 和 $y_p(n)$ 的 z 变换，并且令 $D_p(z)$ 表示分量为 $D_i(z)$ 的向量. 方程(8.16)和(8.17)可以写为

$$D_p(z) = H_p(z) X_p(z), \tag{8.18}$$

$$Y_p(z) = G_p^{\mathrm{T}}(z) D_p(z), \tag{8.19}$$

和

$$Y_p(z) = G_p^{\mathrm{T}}(z) H_p(z) X_p(z). \tag{8.20}$$

因此，分析滤波器组用多输入($X(z)$ 的多相分量)、多输出(信号 $D_i(z)$)线性平移不变系统 $H_p(z)$ 表示，它取自 $X_p(z)$ 并给出 $D_p(z)$. 类似地，综合滤波器组可以解释为一个多输入(信号 $D_i(z)$)、多输出($Y(z)$ 的多相分量)系统 $G_p^{\mathrm{T}}(z)$，它映射 $D_p(z)$ 到 $Y_p(z)$. 显然，我们有完全重构当且仅当 $Y_p(z) = X_p(z)$. 当 $G_p^{\mathrm{T}}(z) H_p(z) = I$ 时，恰好是这样的.

对于传输多路复用器问题，令 $Y_p(z)$ 和 $X_p(z)$ 分别是输入信号和输出信号的向量形式，并且令 $D_p(z)$ 是信号 $D(z)$ 的一般化多相表示. 现在，$D_p(z) = G_p^{\mathrm{T}}(z) Y_p(z)$ 且 $X_p(z) = H_p(z) D_p(z)$. 因此，$X_p(z) = H_p(z) G_p^{\mathrm{T}}(z) Y_p(z)$，并且，对于完全重构，$H_p(z) G_p^{\mathrm{T}}(z) = I$.

定理 40 一个滤波器组有完全重构性质当且仅当

$$G_p^{\mathrm{T}}(z) H_p(z) = I. \tag{8.21}$$

一个传输多路复用器具有完全重构性质当且仅当

$$H_p(z) G_p^{\mathrm{T}}(z) = I \tag{8.22}$$

其中 $H_p(z)$ 和 $G_p(z)$ 是如上定义的.

154

附注 如果 $G_p^{\mathrm{T}}(z) H_p(z) = I$，那么 $H_p(z)$ 必须至少具有与列一样多的行(即，若一个滤波器组是完全重构的，则 $L \geq M$ 是必要的). 如果 $H_p(z) G_p^{\mathrm{T}}(z) = I$，那么 $H_p(z)$ 必须至少具有与行一样多的列(即，若一个传输多路复用器是完全重构的，则 $M \geq L$ 是必要的). 如

果$L=M$，那么 $G_p^{\mathrm{T}}(z)H_p(z)=I=H_p(z)G_p^{\mathrm{T}}(z)$，因此一个滤波器组是完全重构的当且仅当相应的传输多路复用器是完全重构的．对多相表示来说这种等价性是很平常的，而对直接表示与矩阵表示来说则不然．

注意，一个滤波器组或传输多路复用器的完全重构性质是不变的，如果所有分析滤波器和综合滤波器用同样的量位移而方向相反．还有，任一“分析/综合滤波器”对可以以相反方向用 M 倍位移而不影响完全重构性质．使用这两个性质(并且假定所有滤波器有限脉冲响应)，不失一般性，我们可以假定分析滤波器的支撑是$[0, N-1]$(对于某个整数 N)．这还推出 $H_p(z)$是一个 z^{-1}的多项式，我们将在一个重要类滤波器组——酉滤波器组——的参数化中使用．

在滤波器组完全重构性质的所有讨论中，我们没有提到关于滤波器长度的任何事情．双线性完全重构约束完全与滤波器的长度无关，并且对于任意的序列适用．然而，如果序列是无限的，那么我们要求在(8.1)与(8.2)中关于 n 的求和是无限的和收敛的．显然，假定这些滤波器序列属于 $l^2(\mathbf{Z})$足以保证这个要求，因为之后内积是有定义的．

8.2 酉滤波器组

由(8.5)得到，一个滤波器组可以保证是完全重构的，如果分析滤波器选择为使 $\boldsymbol{H}$ 是左酉的，即 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}$. 在这种情形下，综合矩阵 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{H}$(由(8.7))，所以对于所有 i，$\boldsymbol{G}_i=\boldsymbol{H}_i$. 因为 $\boldsymbol{G}_i$ 的行以一个自然顺序包含 g_i，而 $\boldsymbol{H}_i$ 的行以一个指标相反顺序包含 h_i. 所以，对于这样一个滤波器组，因为 $\boldsymbol{G}_i=\boldsymbol{H}_i$，综合滤波器是分析滤波器关于原点的反射；即，$g_i(n)=h_i(-n)$. 分析滤波器和综合滤波器满足这个反射关系的滤波器组称为酉(或正交的)滤波器组，因为 $\boldsymbol{H}$ 是左酉的．用类似方法很容易看到，如果 $\boldsymbol{H}$ 是右酉的(即 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$)，那么相应于这个分析滤波器集的传输多路复用器是完全重构的，满足 $g_i(n)=h_i(-n)$. 这定义了酉传输多路复用器．

现在我们检验，当我们集中注意于酉滤波器时，观察简化完全重构滤波器组和传输多路复用器的三种途径．因为 $g_i(n)=h_i(-n)$，直接特征如下所述：

定理 41 一个滤波器组是酉的当且仅当

$$\sum_i\sum_n h_i(Mn+n_1)h_i(Mn+n_2)=\delta(n_1-n_2). \tag{8.23}$$

一个传输多路复用器是酉的当且仅当

$$\sum_n h_i(n)h_j(Ml+n)=\delta(l)\delta(i-j) \tag{8.24}$$

如果通道的数目等于下抽样因子，那么一个滤波器组是酉的当且仅当相应的传输多路复用器是酉的．

155

酉滤波器组和酉传输多路复用器的矩阵特征由上述讨论可以很清楚地看到：

定理 42 一个滤波器组是酉的当且仅当 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}$，并且一个传输多路复用器是酉的当

且仅当 $HH^{\mathrm{T}} = I$.

酉滤波器组和传输多路复用器的 z 变换域特征在下面给出：

定理 43 一个滤波器组是酉的当且仅当 $H_p^{\mathrm{T}}(z^{-1})H_p(z) = I$，并且一个传输多路复用器是酉的当且仅当 $H_p(z)H_p^{\mathrm{T}}(z^{-1}) = I$.

在本书中(与大多数参考文献一样)，我们主要考虑带的数目等于下抽样因子的情形．对于这样的一个酉滤波器组(传输多路复用器)，式(8.9)和式(8.10)变成

$$\sum_i H_i^{\mathrm{T}} H_i = I, \tag{8.25}$$

和

$$H_i H_j^{\mathrm{T}} = \delta(i-j)I \tag{8.26}$$

矩阵 H_i 是成对正交的，并且形成恒等矩阵的一个分解．换句话说，对于每个 i，$H_i^{\mathrm{T}}H_i$ 是一个正交投影矩阵，并且滤波器组给出一个给定信号的正交分解．如果 P 是一个正交投影矩阵，则 $P^2 = P$ 且 $P \geqslant 0$；在这里的情形中，有 $H_i^{\mathrm{T}}H_i \geqslant 0$ 并且 $H_i^{\mathrm{T}}H_iH_i^{\mathrm{T}}H_i = H_i^{\mathrm{T}}H_i$.

酉性是一种很有用的约束，因为它导致正交分解．此外，对于一个酉滤波器组，我们没必要都设计分析滤波器和综合滤波器，因为 $h_i(n) = g_i(-n)$. 但是，酉滤波器组和传输多路复用器的最重要的性质也许是它们可以参数化．像我们已经看到的，滤波器组设计是一个以完全重构为条件的(一些好的准则的)非线性最优化问题．如果完全重构约束是酉的，那么酉滤波器的参数化导致一个无约束最优化问题．此外，对于设计具有高阶消失矩的小波，非线性方程可以公式化并且在这个参数空间中求解．对非酉的完全重构滤波器组和传输多路复用器进行类似的参数化似乎是不可能的，并且可以直观地看到困难的原因．考虑下述的类比：一个完全重构滤波器组相似于一个左可逆的矩阵，并且一个完全重构传输多路复用器相似于一个右可逆的矩阵．如果 $L = M$，那么完全重构滤波器组相似于一个可逆矩阵．一个酉滤波器组相似于一个左酉矩阵，一个酉传输多路复用器相似于一个右酉矩阵，并且当 $L = M$ 时，它们的每一个都是一个酉矩阵．左酉矩阵、右酉矩阵，特别是酉矩阵可以使用 Givens 旋转或豪斯霍尔德变换参数化[GL93]. 然而，左可逆、右可逆，特别是可逆矩阵没有一般的参数化．而且，酉性允许滤波器组和传输多路复用器明确地参数化，完全重构恰好避开了这种参数化．以下类推甚至更适当：酉滤波器组和传输多路复用器有两种参数化，分别相应于 Givens 旋转和豪斯霍尔德变换． 156

所有关于滤波器组和传输多路复用器的讨论，稍微改变符号就可自然地转移到多维情形，其中用某个整数矩阵下抽样[GB94a]. 然而，我们现在讨论的参数化的结果在多维情形中还不知道．在二维情形中，一个隐含但或许不太实用的(由滤波器设计观点)酉滤波器组的参数化问题在[BC92]中描述．

考虑一个具有有限脉冲响应滤波器(即对于所有 i，h_i 是一个有限序列)的酉滤波器组．不失一般性，滤波器可以位移使得 $H_p(z)$ 是 z^{-1} 的多项式．在这种情形下 $G_p(z) = H_p(z^{-1})$ 是 z 的一个多项式．令

$$H_p(z) = \sum_{k=0}^{K-1} h_p(k) z^{-k}. \tag{8.27}$$

即，$H_p(z)$是具有系数 $h_p(k)$且次数为 $K-1$ 的 z^{-1}的多项式．因为 $H_p^T(z^{-1})H_p(z)=I$，由式(8.27)，因为它是乘积 $H_p^T(z^{-1})H_p(z)$的 z^{K-1}的系数，所以我们必有 $h_p^T(0)h_p(K-1)=0$. 所以 $h_p(0)$是奇异的．令 P_{K-1}是到 $h_p(K-1)$值域的唯一的投影矩阵(比如说维数 δ_{K-1})．那么 $h_p^T(0)P_{K-1}=0=P_{K-1}h_p(0)$．还有 $P_{K-1}h(K-1)=h(K-1)$并且因此 $(I-P_{K-1})h(K-1)=0$. 现在$[I-P_{K-1}+zP_{K-1}]H_p(z)$是一个最高次数为 $K-2$ 的矩阵多项式．如果(我们不失一般性假定)$h(0)$和 $h(K-1)$是非零的，则次数是 $K-2$. 而且它是酉的，因为 $I-P_{K-1}+zP_{K-1}$是酉的．反复应用这个过程$(K-1)$次，给出一个零次(常数)酉矩阵 V_0. 上述的讨论表明，一个任意的 $K-1$ 次酉多项式矩阵，算法上可以唯一地表示为下述定理描述的：

定理 44 一个多项式矩阵 $H_p(z)$，在单位圆周上是酉的(即 $H_p^T(z^{-1})H_p(z)=I$)，并且多项式次数为 $K-1$，存在唯一投影矩阵 P_k(每个秩是某个整数 δ_k)的集合，使得

$$H_p(z) = \left\{ \prod_{k=K-1}^{1} [I - P_k + z^{-1}P_k] \right\} V_0. \tag{8.28}$$

附注 由于投影 P_k 秩是 δ_k，对于一个不是唯一的规范正交向量 v_i 的集合，投影可以写为 $v_1v_1^T+\cdots+v_{\delta_k}v_{\delta_k}^T$. 使用事实

$$[I - v_jv_j^T - v_{j-1}v_{j-1}^T + z^{-1}(v_jv_j^T + v_{j-1}v_{j-1}^T)] = \prod_{i=j}^{j-1} [I - v_iv_i^T + z^{-1}v_iv_i^T], \tag{8.29}$$

定义 $\Delta = \sum_k \delta_k$,并且收集所有的 v_j,定义 P_k 到一个共享记号,我们得到下述的因子化：

157

$$H_p(z) = \left\{ \sum_{k=\Delta}^{1} [I - v_kv_k^T + z^{-1}v_kv_k^T] \right\} V_0. \tag{8.30}$$

如果 $H_p(z)$是一个滤波器组的分析组，那么注意到Δ(由式(8.30))是实现分析组所需的存储元素的数目．实现任一变换函数存储元素最小的数目称为 McMillan 次数，并且在此情形下，Δ 确实是 McMillan 次数[Vai92]. P_K 选择是映上到 $h_p(K-1)$值域的投影矩阵．作为代替，我们可以选择 P_K 是映上到 $h_p(0)$零空间的投影(这包括 $h_p(K-1)$值域)或者在两个空间之间的任一空间的投影．每种选择导致一个不同的因子序列 P_K 和相应的 δ_k(除了在问题中值域和零空间在阶缩减过程中与某个级一致)．进而，Δ McMillan 次数是常数．

方程(8.30)可以用作设计滤波器组的一个出发点．该方程可以参数化所有具有 McMillan 次数 Δ 的酉滤波器组．如果 $\Delta=K$，那么具有长度 $N\leqslant MK$ 的所有酉滤波器组，使用 $K-1$ 个酉向量集 v_k 和一个酉矩阵 V_0 参数化．每个酉向量有$(M-1)$个自由参数，而酉矩阵有 $M(M-1)/2$ 个自由参数，对了 $H_p(z)$总共有$(K-1)(M-1)+\binom{M}{2}$个自由参数．滤波器组设计问题是：选择这些自由参数以最优化滤波器组的“有用”准则．

如果 $L>M$，并且 $H_p(z)$ 是左西的，那么一个类似的分析恰好得到与前边一样的因子化，除了 V_0 是一个左酉矩阵以外．在这种情形下，自由参数的数目用 $(K-1)(L-1)+\binom{L}{2}-\binom{M}{2}$ 给出．对于具有 $L<M$ 的传输多路复用器，我们可以对于 $H_p^{\mathrm{T}}(z)$（这是左酉的）使用如上同样的因子化．考虑到下述理由，甚至对于具有 $L=M$ 的滤波器组或传输多路复用器，左/右酉的 $H_p(z)$ 的因子化也是有用的．我们假定，分析滤波器的一个子集已经预设计了（例如，在小波理论中，我们有时独立地设计 h_0 是一个 K 正则尺度滤波器，与在第6章中一样）．相应于这个滤波器的子集合的 $H_p(z)$ 的子矩阵是右酉的，因此，它的转置可以像上面那样用一个向量集 v_k 和一个左酉矩阵 V_0 进行参数化．对于 V_0 剩余列的每种选择，都可以在滤波器组中选择一种剩余的滤波器．事实上，具有固定的 McMillan 次数的原来子集的所有可能的完备化(completion)是以这种方式给出的．

正交滤波器组有时涉及衰减滤波器组，因为子带信号收集的能量与原信号的能量相同．如果 U 是一个正交的矩阵，那么信号 $x(n)$ 和 $Ux(n)$ 有同样的能量．如果 P 是一个正交投影矩阵，那么

$$\|x\|^2=\|Px\|^2+\|(I-P)x\|^2.$$

对于任一给出的 $X(z)$，$X(z)$ 和 $z^{-1}X(z)$ 具有同样的能量．使用上述事实，对于任一投影矩阵 P，我们求得

$$D_p(z)=[I-P+z^{-1}P]X_p(z)\overset{\text{def}}{=}T(z)X_p(z)$$

具有与 $X_p(z)$ 同样的能量．这等价于，$T(z)$ 在单位圆上是酉的（我们可以直接验证这个事实）．所以，（由式(8.28)）得到子带信号具有与原信号同样的能量． 158

为了使滤波器设计中的自由参数明确，现在我们使用角度(angle)参数描述 V_0 和 $\{v_i\}$．首先考虑 v_i，满足 $\|v_i\|=1$. 显然，v_i 有 $(M-1)$ 个自由度．一种方法是使用 $(M-1)$ 个角度参数 $\theta_{i,k}(k\in\{0,1,\cdots,M-2\})$ 参数化 v_i，定义 v_i 的分量如下：

$$(v_i)_j=\begin{cases}\left\{\prod_{l=0}^{j-1}\sin(\theta_{i,l})\right\}\cos(\theta_{i,j}) & \text{对于 } j\in\{0,1,\cdots,M-2\}\\ \left\{\prod_{l=0}^{M-1}\sin(\theta_{i,l})\right\} & \text{对于 } j=M-1.\end{cases}$$

关于 V_0，它是一个 $M\times M$ 正交矩阵，它具有 $\binom{M}{2}$ 个自由度．有两个著名的常数正交矩阵的参数化，一个基于 Givens 旋转（著名的 QR 因子化等[DS83]），而另一个基于豪斯霍尔德反射．在豪斯霍尔德参数化中

$$V_0=\prod_{i=0}^{M-1}[I-2v_iv_i^{\mathrm{T}}],$$

其中 v_i 是满足 v_i 的第一到第 i 个分量为零的单位范数向量．每个矩阵因子 $[I-2v_iv_i^{\mathrm{T}}]$ 当用

一个向量 q 乘的时候，关于垂直于 v_i 的平面反射 q，因此名为豪斯霍尔德反射．因为 v_i 的第一到第 i 个分量是零，并且 $\| v_i \| = 1$，v_i 有 $M-i-1$ 个自由度．因为每个都是单位向量，它们可以像前面一样使用 $M-i-1$ 个角度参数化．所以，总的自由度是

$$\sum_{i=0}^{M-1} (M-1-i) = \sum_{i=0}^{M-1} i = \binom{M}{2}.$$

概括地说，任一正交矩阵可以因子化为 M 个关于垂直于向量 v_i 的平面的反射的一个级联．

注意 V_0 的豪斯霍尔德反射因子与(8.30)中 $H_p(z)$ 的因子之间的类似性．基于这种类似性，在本节中酉矩阵和酉向量的因子化称为豪斯霍尔德因子化．类似于常数酉矩阵的Given 因子化，我们还能得到酉矩阵 $H_p(z)$ 和酉向量 $V(z)$ 的一种因子化[DVN88]．然而，从滤波器组理论和小波理论的观点看，除了当 $M=2$ 时以外，豪斯霍尔德因子化都是比较易于了解和实现的．

或许最简单和最通俗的方法是用一个旋转参数(不是用豪斯霍尔德反射参数)描述一个 2×2 酉矩阵．所以，表示一个 2×2 酉矩阵 $H_p(z)$ 的最简单的方法是使用 Given 旋转使用一种点阵参数化．因为2带酉滤波器组在酉调制滤波器组的理论和设计中起重要的作用(我们将简短地描述)，我们给出点阵参数化[VH88]．点阵参数化还由一种阶缩减方法得到，我们看到这导出在(8.28)的豪斯霍尔德因子化．

159

定理45 *每个 2×2 酉矩阵 $H_p(z)$(特别是一个2带有限脉冲响应酉滤波器组的多相矩阵)形如*

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} R(\theta_{K-1}) Z R(\theta_{K-2}) Z \cdots Z R(\theta_1) Z R(\theta_0), \tag{8.31}$$

其中

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad 且 \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}. \tag{8.32}$$

方程(8.31)是 $H_p(z)$ 的*酉点阵*(unitary latlice)参数化．滤波器 $H_0(z)$ 和 $H_1(z)$ 用

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = H_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix}$$

给出．通过改变滤波器 $h_1(n)$ 的符号(如果必要)，我们总能把 $H_p(z)$ 写为

$$H_p(z) = R(\theta_{K-1}) Z R(\theta_{K-2}) Z \cdots Z R(\theta_0).$$

现在，如果 $H_{0,j}^R(z)$ 是 $H_{0,j}(z)$ 的反射(即 $H_{0,j}(z) = z^{-K+1} H_{0,j}(z^{-1})$)，那么(由 $R(\theta)$ 的代数形式)有

$$\begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) \\ H_{1,0}(z) & H_{1,1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) \\ -H_{0,1}^R(z) & H_{0,0}^R(z) \end{bmatrix}. \tag{8.33}$$

使用这些参数化，滤波器组可以设计为一个无约束最优化问题．描述的参数化是重要

的(由于其他的原因). 结果是，酉滤波器组最有效的(由算术运算数目)实现是使用豪斯霍尔德参数化. 由于有了任意的滤波器组，利用上抽样与下抽样的速度变化运算，我们可以组织计算. 例如，我们不必计算用下抽样抽掉的值. 使用酉滤波器组的参数化除了上面这些明显的好处之外，还有其他好处(例如见[Vai92]中第330～331页与第386～387页). 除此之外，稍微修改这些参数化允许保持酉性，甚至在滤波器系数量化之下——而这在硬件数字信号处理器中，对于这些滤波器组的定点实现有结论.

8.3 酉滤波器组——一些具体的例子

M 带酉滤波器组及其参数化的一些具体例子将阐明我们的讨论.

首先考虑在 5.9 节看到的相应于 Daubechies 四系数尺度函数和小波的 2 带滤波器组. 低通滤波器(尺度滤波器)用

n	0	1	2	3
$h_0(n)$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

给出. 高通滤波器(小波滤波器)用 $h_1(n)=(-1)^n h_0(3-n)$ 给出，并且都满足(8.1)和(8.2)，有 $g_i(n)=h_i(-n)$. 这个滤波器组的分析组的矩阵表示由下式给出

160

$$
d=Hx=\begin{bmatrix}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & 0 & 0 & \\
\ddots & -\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & -\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & 0 & 0 & \ddots \\
 & 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \\
 & 0 & 0 & -\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & -\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}x. \tag{8.34}
$$

我们容易验证 $H^{\mathrm{T}}H=I$ 和 $HH^{\mathrm{T}}=I$. 这个滤波器组的多相表示用

$$
H_p(z)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(1+\sqrt{3})+z^{-1}(3-\sqrt{3}) & (3+\sqrt{3})+z^{-1}(1-\sqrt{3}) \\ (3+\sqrt{3})+z^{-1}(1-\sqrt{3}) & (-3+\sqrt{3})-z^{-1}(1+\sqrt{3})\end{bmatrix} \tag{8.35}
$$

给出，并且我们可以证明 $H_p^{\mathrm{T}}(z^{-1})H_p(z)=I$ 和 $H_p(z)H_p^{\mathrm{T}}(z^{-1})=I$. $H_p(z)$ 的豪斯霍尔德因子化用

$$
H_p(z)=[I-v_1v_1^{\mathrm{T}}+z^{-1}v_1v_1^{\mathrm{T}}]V_0 \tag{8.36}
$$

给出，其中

$$v_1 = \begin{bmatrix} \sin(\pi/12) \\ \cos(\pi/12) \end{bmatrix} \quad 和 \quad V_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

顺便提一下，相应于小波紧框架的所有2带酉滤波器组具有 V_0 同样的值．所以，相应于2带小波紧框架的所有滤波器组完全由一个正交向量集 v_i 确定，如果 h_0 长度是 $2K$，那么正交向量集是 $K-1$ 个向量．事实上，对于六系数 Daubechies 小波(见5.9节)，$H_p(z)$ 的参数化与下述两个酉向量有关(因为 $K=3$)：$v_1^{\mathrm{T}} = [-0.3842.9232]$ 和 $v_2^{\mathrm{T}} = [-0.1053 \; -0.9944]$.

对于四系数 Daubechies 滤波器，基于 $H_p(z)$ 的因子化的 Given 旋转用

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & z^{-1}\sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & z^{-1}\cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{8.37}$$

给出，其中 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$，$\theta_1 = -\frac{\pi}{12}$. 事实上，与小波有关的滤波器组是准确的，因为 $\theta_0 + \theta_1 = \frac{\pi}{4}$. 更一般地讲，对于相应于小波的滤波器长度为 $2K$ 的一个滤波器组，$\sum_{k=0}^{K-1} \theta_k = \frac{\pi}{4}$. 这是所期望的，因为对于相应于小波的长度为 $2K$ 的滤波器，(由豪斯霍尔德因子化)有 $K-1$ 个参数 v_i.

我们的第二个例子属于称为调制滤波器组的一类酉滤波器组，这在下一节中描述．长度为 $N=2M$ 且相应于一组规范正交小波基的一个1型调制滤波器组用

$$h_i(n) = \sqrt{\frac{1}{2M}}\left[\sin\left(\frac{\pi(i+1)(n+0.5)}{M} - (2i+1)\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi i(n+0.5)}{M} - (2i+1)\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{8.38}$$

161

定义，其中 $i \in \{0, \cdots, M-1\}$ 和 $n \in \{0, \cdots, 2M-1\}$ [GB95b, GB95c]. 考虑一个长度为6的3带滤波器组的例子．在此情形下，$K=2$，所以我们有一个投影 P_1 和矩阵 V_0. 投影是一维的，并且用豪斯霍尔德参数给出

$$v_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad 和 \quad V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}. \tag{8.39}$$

第三个例子是另一个具有 $M=4$ 和 $N=8$ 的1型调制滤波器组．滤波器用(8.38)给出．$H_p(z)$ 具有下述的参数化

$$H_p(z) = [I - P_1 + z^{-1}P_1]V_0, \tag{8.40}$$

其中 P_1 是一个二维投影 $P_1 = v_1 v_1^{\mathrm{T}} + v_2 v_2^{\mathrm{T}}$(注意 v_1 和 v_2 的任意选择)用

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.41636433418450 \\ -0.78450701561376 \\ 0.32495344564406 \\ 0.32495344564406 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.00000000000000 \\ -0.14088210492943 \\ 0.50902478635868 \\ -0.84914427477499 \end{bmatrix}$$

和

$$V_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

给出．注意到 v_1 和 v_2 有无穷多种选择，它们都给出同样的投影 P_1.

8.4 M 带小波紧框架

在 7.2 节中的(7.7)，当讨论 M 带小波系统性质时，我们看到低通滤波器 h_0(那里使用的记号为 h) 必须满足线性约束 $\sum_n h_0(n) = \sqrt{M}$. 否则，具有非零积分的一个尺度函数不存在．为了生成一个 M 带小波系统，这只给出了一个有限脉冲响应酉滤波器必须满足的条件 [Law90,GB92c]. 事实上，如果不满足这个线性约束，那么滤波器组就不生成一个小波系统. 这个简单的(对于酉滤波器组的)线性约束还推出 $\sum_n h_i(n) = 0$ 对于 $i \in \{1, 2, \cdots, M-1\}$ 成立(因为方程(8.1)). 现在我们给出连接有限脉冲响应酉滤波器组和小波紧框架的精确的结果．

定理 46 给定一个满足 $\sum_n h_0(n) = \sqrt{M}$ 的有限脉冲响应酉滤波器组，存在由尺度递推关系

$$\psi_0(t) = \sqrt{M}\sum_k h_0(k)\psi_0(Mt-k) \tag{8.41}$$

[162]

决定的唯一的紧支撑尺度函数 $\psi_0(t) \in L^2(\mathbf{R})$ (具有支撑 $\left[0, \frac{N-1}{M-1}\right]$，假定 h_0 的支撑是 $[0, N-1]$). 定义小波 $\psi_i(t)$,

$$\psi_i(t) = \sqrt{M}\sum_k h_i(k)\psi_0(Mt-k) \quad i \in \{1,2,\cdots,M-1\}, \tag{8.42}$$

和函数族 $\psi_{i,j,k}(t)$

$$\psi_{i,j,k}(t) = M^{j/2}\psi_i(M^j t - k). \tag{8.43}$$

那么，$\{\psi_{i,j,k}\}$ 形成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个紧框架．即，对于所有 $f \in L^2(\mathbf{R})$,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\langle f, \psi_{i,j,k}\rangle\psi_{i,j,k}(t). \tag{8.44}$$

还有

$$f(t) = \sum_k \langle f,\psi_{0,0,k}\rangle \psi_{0,0,k}(t) + \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,\psi_{i,j,k}\rangle \psi_{i,j,k}(t) \tag{8.45}$$

附注 一个类似的结果涉及一般的有限脉冲响应(不必要是酉的)滤波器组和 M 带小波框架[CDF92, GB92c, Gop92].

由(8.41)出发，我们可以使用逐次逼近，或者在 M 进有理数上的插值计算尺度函数——像在7.2节的2带情形．然后，方程(8.42)借助于尺度函数给出小波．如同在2带的情形，如此构造的函数 $\psi_i(t)$ 常常显出高的不正则性，并且有时是分形的．再一次，解要求尺度函数的若干矩(或者等价地尺度滤波器 h_0 的矩)是零．这使得定义 K 正则 M 带尺度滤波器如下：一个酉尺度滤波器 h_0 称为是 K 正则的，如果它的 Z 变换对于最大的可能的 K 能写为形如

$$H_0(z) = \left[\frac{1+z^{-1}+\cdots+z^{-(M-1)}}{M}\right]^K Q(z). \tag{8.46}$$

默认情况下,每个酉滤波器 h_0 是1正则的(因为 $\sum_n h_0(n) = \sqrt{M}$——见7.2节,K 正则性等价特征的公式(7.7)).在方程(8.46)中的 K 个恒等因子的每一个在 h_0 上增加一个额外的线性约束(实际上,这是在 h_0 的 M 个多相子序列的每一个上的一个线性约束——见5.10节).

在尺度函数的光滑性和 K 正则性之间没有一个简单的关系．然而，具有固定滤波器长度 N 的最大正则尺度滤波器 h_0 的光滑性导致 N 的增函数．或许我们可以证明 K 正则性是一个与小波系统的光滑性无关的重要概念．K 正则性推出小波的消失矩直到 $K-1$ 阶，所以，函数可以通过使用在给定的尺度上的尺度函数和它的平移比较好地逼近．对于 M 带最大正则的 K 正则尺度滤波器(即只是序列 h_0)的公式存在[SHGB93]. 使用豪斯霍尔德参数化，我们可以设计滤波器组中剩余的滤波器．

构成 K 正则性的 h_0 上的线性约束在相应于滤波器组的豪斯霍尔德参数化上变成不明显的非线性约束．然而，1正则性可以明显地合并，并且这给出所有 M 带紧支撑小波紧框架的一种参数化．为此，考虑一个酉滤波器组的 $H_p(z)$ 的下述两种参数化．

163

$$H_p(Z) = \prod_{k=K-1}^{1}[I - P_k + z^{-1}P_k]V_0, \tag{8.47}$$

和

$$H_p^{\mathrm{T}}(z) = \prod_{k=K-1}^{1}[I - Q_k + z^{-1}Q_k]W_0. \tag{8.48}$$

因为 $H_p(1) = V_0$ 和 $H_p^{\mathrm{T}}(1) = W_0$，所以 $V_0 = W_0^{\mathrm{T}}$. W_0 的第一列是单位向量 $[H_{0,0}(1), H_{0,1}(1), \cdots, H_{0,M-1}(1)]^{\mathrm{T}}$. 所以

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_{0,k}(1)^2 = 1.$$

但是,因为 $\sum_n h_0(n) = H_0(1) = \sqrt{M}$,

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_{0,k}(1) = \sqrt{M}.$$

所以，对于所有 k，$H_{0,k}(1)=\frac{1}{\sqrt{M}}$. 因此，$V_0$ 的第一行是$[1/\sqrt{M}, 1/\sqrt{M}, \cdots, 1/\sqrt{M}]$. 换句话说，一个酉滤波器组引起一个小波紧框架，当且仅当在豪斯霍尔德参数化中 V_0 的第一行是所有元素为 $1/\sqrt{M}$的向量.

另一方面，对于一个 2 带酉滤波器组，考滤 $H_p(z)$的 Given 因子化

$$H_p(z) = \left\{\prod_{i=K-1}^{1}\begin{bmatrix} \cos\theta_i & z^{-1}\sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & z^{-1}\cos\theta_i \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix}. \tag{8.49}$$

因为对于一个小波紧框架，我们需要

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0,0}(1) & H_{1,0}(1) \\ H_{0,1}(1) & H_{1,1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{bmatrix}, \tag{8.50}$$

我们有 $\Theta = \sum_{k=0}^{K-1}\theta_k = \frac{\pi}{4}$. 这是相应于小波的点阵参数化的条件.

8.5 调制滤波器组

滤波器组设计通常需要滤波器系数的最优化，以极大化某些从属于完全重构约束的好的测度. 存在一个(对于参数化酉滤波器组设计的)约束(或者非约束)非线性规划问题，数值最优化导致局部极小，当有一个大数目滤波器系数时，问题就严重了. 为了减轻这个问题，我们可以试着在滤波器上强加结构约束. 例如，如果图 8-2 描述理想频率响应，那 164 么我们可以强加约束使得所有分析(综合)滤波器由一个"原型"分析(综合)滤波器的调制得到. 这是在调制滤波器背后的基本概念[Mal92, KV92, Vai92, NK92, GB95b, GB93, Gop96b, LV95]. 下面，我们只考虑滤波器的数目等于下抽样因子(即 $L=M$)的情形.

图 8-2 中的频率响应可以用平移一个理想低通滤波器(支撑在$\left[-\frac{\pi}{2M}, \frac{\pi}{2M}\right]$，由$\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$，$i\in\{0, \cdots, M-1\}$)的频率响应得到. 这可以用调制具有适当频率和任意相位的余弦(或正弦)达到. 然而，相位的一些选择或许与完全重构是不相容的. 相位的一般选择(且因此覆盖这种类型的所有调制滤波器组的调制)用下述分析滤波器和综合滤波器的定义给出：

$$h_i(n) = h(n)\cos\left(\frac{\pi}{M}\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad i\in\mathcal{R}(M), \tag{8.51}$$

$$g_i(n) = g(n)\cos\left(\frac{\pi}{M}\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad i\in\mathcal{R}(M), \tag{8.52}$$

这里，α 是一个称为调制相位的整数参数．现在，对于在(8.1)中的滤波器，我们可以代替这些形式明确得到在原型滤波器 h 和 g 上的完全重构约束．这是一个简单的代数练习，因为在(8.1)关于 i 求和是一个容易计算的三角和．结果是完全重构条件只依赖于调制相位 α 的奇偶性．因此，不失一般性，我们选择 $\alpha \in \{M-1, M-2\}$——另外的选择作为一个预位移合并到原型滤波器 h 和 g.

因此，有两种类型的调制滤波器组依赖于调制相位的选择：

$$\alpha = \begin{cases} M-1 & 1\text{ 型滤波器组} \\ M-2 & 2\text{ 型滤波器组} \end{cases} \tag{8.53}$$

在 h 和 g 上的完全重构约束记录表示是十分混乱的．但是，基本的、自然的约束从图示很容易理解．令 M 个 h 和 g 的多相分量分别划分为如图 8-4 所示的对．每个来自 h 的多相对和相应的多相对 g(即，这四个序列)对于一个 2 带滤波器组满足完全重构条件．换句话说，这些子序列可以分别用作一个 2 带完全重构滤波器组中的分析滤波器和综合滤波器．如在图 8-4 中看到的，一些多相分量不是成对的．完全重构强加于这些序列上的约束将在后面描述．同时，注意到系数上的完全重构约束粗略地分为$M/2$组独立约束(因为在图 8-4 中大概有$M/2$组完全重构对)．为量化这些，定义 J:

$$J = \begin{cases} \dfrac{M}{2} & 1\text{ 型},M\text{ 是偶数} \\ \dfrac{M-1}{2} & 1\text{ 型},M\text{ 是奇数} \\ \dfrac{M-2}{2} & 2\text{ 型},M\text{ 是偶数} \\ \dfrac{M^2-1}{2} & 2\text{ 型},M\text{ 是奇数} \end{cases} \tag{8.54}$$

换句话说，调制滤波器组完全重构约束分解为 J 组 2 带完全重构约束，以及在不配对的 h 和 g 的多相分量上的一些附加条件．

165

我们首先定义分析原型滤波器和综合原型滤波器的 M 个多相分量，分别是 $P_l(z)$ 和 $Q_l(z)$. 我们把这些序列进一步分为偶分量和奇分量，分别给出 $P_{l,0}(z)$，$P_{l,1}(z)$，$Q_{l,0}(z)$ 和 $Q_{l,1}(z)$. 更准确地，令

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} P_l(z^M) = \sum_{l=0}^{M-1} Z^{-l}(P_{l,0}(z^{2M}) + z^{-M} P_{l,1}(z^{2M})), \tag{8.55}$$

$$G(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{l} Q_l(z^M) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{l}(Q_{l,0}(z^{2M)} + z^{M} Q_{l,1}(z^{2M})), \tag{8.56}$$

并且令

$$\mathcal{P}(z) = \begin{bmatrix} P_{l,0}(z) & P_{l,1}(z) \\ P_{\alpha-l,0}(z) & -P_{\alpha-l,1}(z) \end{bmatrix}, \tag{8.57}$$

而$\mathcal{Q}(z)$的定义类似．令$\mathcal{I}$是 2×2 单位矩阵．

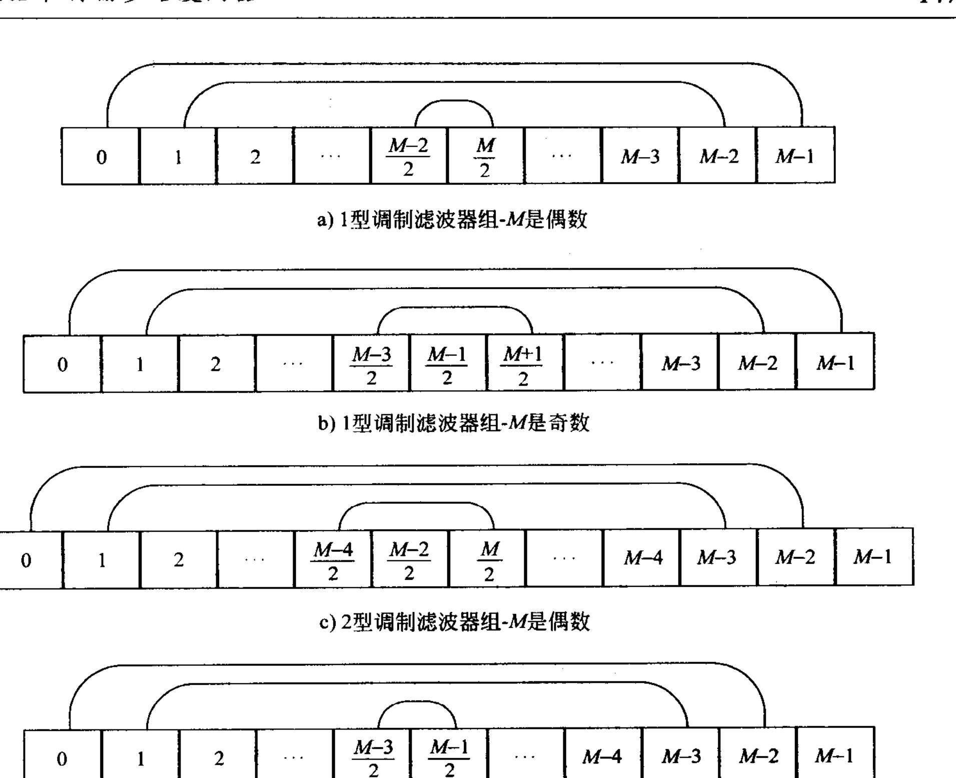


图 8-4 在一个完全重构调制滤波器组中的 2 带完全重构对

定理 47(调制的滤波器组完全重构定理) 一个调制的滤波器组(1 型或 2 型)(像在(8.51)与(8.52)中定义的)是完全重构的当且仅当对于 $l \in R(J)$

$$\mathcal{P}_l(z)\ \mathcal{Q}_l^{\mathrm{T}}(z) = \frac{2}{M}\mathcal{I} \tag{8.58}$$

进而如果 α 是偶数，则 $P_{\frac{\alpha}{2},0}(z)\,Q_{\frac{\alpha}{2},0}(z) = \frac{1}{M}$. 在 2 型的情形，我们进一步要求 $P_{M-1}(z)Q_{M-1}(z) = \frac{2}{M}$.

结果 P_l，$P_{\alpha-l}$，Q_l 和 $Q_{\alpha-l}$形成一个 2 带完全重构滤波器组(在 z 变换域中(8.1))的分析滤波器和综合滤波器.

调制滤波器组设计包括选择 h 和 g 以最优化某些好的准则，直到符合上述定理中的约束.

酉调制滤波器组

在一个酉滤波器组中，滤波器满足 $g_i(n) = h_i(-n)$. 由(8.13)和(8.14)知，在一个

调制滤波器中，如果 $g(n)=h(-n)$，那么 $g_i(n)=h_i(-n)$. 利用这个约束（分析原型滤波器和综合原型滤波器彼此之间是反射的）给出酉调制滤波器组的完全重构条件. $g(n)=h(-n)$ 推出 $P_l(z)=Q_l(z^{-1})$，所以 $Q_l(z)=P(z^{-1})$. 事实上，对于完全重构，我们要求

$$\mathcal{P}_l(z)\,\mathcal{P}_l^{\mathrm{T}}(z^{-1}) = \frac{2}{M}\mathcal{I}. \tag{8.59}$$

这个条件等价于要求 P_l 和 $P_{\alpha-l}$ 是一个2带酉滤波器组的分析滤波器. 等价地，对于 $l\in R(M)$，$P_{l,0}$ 和 $P_{l,1}$ 是幂互补的.

推论6（酉调制滤波器组完全重构定理） 一个调制滤波器组（1型或2型）是酉的，当且仅当对于 $l\in R(J)$，$P_{l,0}(z)$ 和 $P_{l,1}(z)$ 是幂互补的

$$P_{l,0}(z)P_{l,0}(z^{-1})+P_{l,1}(z)P_{l,1}(z^{-1}) = \frac{2}{M},\quad l\in\mathcal{R}(M) \tag{8.60}$$

进而，当 α 是偶数时，$P_{\frac{\alpha}{2},0}(z)P_{\frac{\alpha}{2},0}(z^{-1})=\frac{1}{M}\left(\text{即对于某个整数，} P_{\frac{\alpha}{2},0}(z)\text{是}\frac{1}{\sqrt{M}}z^k\right)$. 在2型的情形，我们进一步要求 $P_{M-1}(z)P_{M-1}(z^{-1})=\frac{2}{M}\left(\text{即对于某个整数，}P_{M-1}(z)\text{是}\frac{2}{\sqrt{M}}z^k\right)$.

酉调制滤波器组设计需要选择分析原型滤波器 h. 有 J 个相关的2带酉滤波器组，它们中的每一个都可以使用点阵参数化进行参数化. 除此以外，依赖于滤波器是否是2型的和/或 α 是否是偶的，以选择延迟定位.

166~167

要使一个酉调制滤波器组的原型滤波器是线性相位的，对于某个整数 k，必须有

$$P_{\alpha-l}(z) = z^{-2k+1}P_l(z^{-1}). \tag{8.61}$$

在这种情况下，原型滤波器（如果有限脉冲响应）在1型情形下长度为 $2Mk$ 且关于 $\left(Mk-\frac{1}{2}\right)$ 对称，（对于A类和B类调制滤波器组）长度为 $2Mk-1$ 且关于 $(Mk-1)$ 对称. 在有限脉冲响应情形下，我们可以由使用2带酉滤波器组的点阵参数化[VH88]得到线性相位原型滤波器. 具有有限脉冲响应线性相位原型滤波器的滤波器组称为是典型的（canonical）. 在此情形下，$P_l(z)$ 对于所有 l 通常是一个长度为 $2k$ 的滤波器. 对于典型调制滤波器组，我们必须只对于 $l\in R(J)$ 验证幂互补性.

8.6 调制小波紧框架

对于所有 M，存在 M 带调制小波紧框架. h_0 上的线性约束在相应于调制滤波器组的 J 个2带酉点阵的每个上，变成 J 个线性约束的一个集合.

定理48（调制小波紧框架定理） 每个紧支撑调制小波紧框架依赖于一个有限脉冲响应酉调制滤波器组，并且用 J 个酉点阵参数化使得在点阵中角度的和满足（对 $l\in\mathcal{R}(J)$）方程(8.62).

$$\sum_k \theta_{l,k} \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_l = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2M}\left(\frac{\alpha}{2}-l\right). \tag{8.62}$$

如果一个典型的调制滤波器组有 Jk 个参数，那么相应的小波紧框架有 $J(k-1)$ 个参数.

注意到，即使对于调制滤波器组，完全重构条件都依赖于它是否是1型的或者2型的，调制小波紧框架条件是相同的. 现在考虑每个点阵具有一个角度参数的1型或者2型的调制滤波器组，即 $N=2M$(1型)或 $N=2M-1$(2型). 如果我们想要相应的小波，这个角度参数由上述调制小波紧框架定理确定. 这个角度参数的选择给出一个特别简单的原型滤波器形式.

在1型的情形下[GB95b, GB93],

$$h(n)=\sqrt{\frac{2}{M}}\sin\left(\frac{\pi}{4M}(2n+1)\right). \tag{8.63}$$

所以

$$h_i(n)=\sqrt{\frac{1}{2M}}\left[\sin\left(\frac{\pi(i+1)(n+0.5)}{M}-(2i+1)\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi i(n+0.5)}{M}-(2i+1)\frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{8.64}$$

在2型的情形下[GB95b],

$$h(n)=\sqrt{\frac{2}{M}}\sin\left(\frac{\pi}{2M}(n+1)\right), \tag{8.65}$$

因此

$$h_i(n)=\sqrt{\frac{1}{2M}}\left[\sin\left(\frac{\pi(i+1)(n+1)}{M}-(2i+1)\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi i(n+1)}{M}-(2i+1)\frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{8.66}$$

168

8.7 线性相位滤波器组

在一些应用中，希望有具有线性相位滤波器的滤波器组[SVN93]. 线性相位约束(像前面研究的调制约束)减少在一个滤波器组的设计中自由参数的数目. 酉线性相位滤波器组近来已经得到研究[SVN93, GB94b]. 本节讨论某些类型线性滤波器组的代数特征，这可以用于作为设计这样滤波器组的一个出发点.

本节假定想要得到的频率响应像(8.2)中的那样. 为了简单，我们还假定带数 M 是偶数，并且滤波器是有限脉冲响应的. 用一种直接的方法可以拓展此结果到 M 是奇数的情形.

考虑一个 M 带有限脉冲响应滤波器组，滤波器的通带逼近理想滤波器的通带. 许多变换都与 M 带理想滤波器的响应有关. 我们已经看到过一个例子，其中所有理想滤波器都由一个原型滤波器的调制得到. 现在来看一看与滤波器有关的其他类型的变换. 特别地，h_{M-1-i} 的理想频率响应可以用平移 h_i 的响应为 π 得到. 这或者相应于约束

$$h_{M-1-i}(n) = (-1)^n h_i(n);\quad H_{M-1-i}(z) = H_i(-z);\quad H_{M-1-i}(\omega) = H_i(\omega+\pi),\tag{8.67}$$

或者约束

$$h_{M-1-i}(n) = (-1)^n h_i(N-1-n);\quad H_{M-1-i}(z) = H_i^{\mathrm{R}}(-z);\quad H_{M-1-i}(\omega) = H_i^*(\omega+\pi)\tag{8.68}$$

其中 N 是滤波器的长度，并且对于多项式 $H(z)$，$H^{\mathrm{R}}(z)$ 表示它的反射多项式(即具有颠倒阶的系数的多项式). 前者称为成对平移(pairwise-shift, PS)对称(也称为成对镜像(pairwise mirrorimage)对称[NV88])，而后者称为成对共轭平移(pairwise-conjugated-shift, PCS)对称(也称为成对对称). 这些对称与滤波器组中的滤波器对有关. 另一个对称类型当滤波器本身是对称的或是线性相位的时出现. 我们考虑的唯一的线性相位对称的类型形如

$$h_i(n) = \pm h_i(N-1-n);\quad H_i(z) = \pm H_i^{\mathrm{R}}(z),$$

其中滤波器都是固定长度 N，并且关于$\frac{N-1}{2}$是对称的. 对于一个 M 带线性相位滤波器组(其中 M 是偶数)，每$M/2$个滤波器分别是偶对称的和奇对称的[SVN93].

现在我们看一看强加这三种类型对称的分析组的多相分量矩阵 $H_p(z)$ 上的结构约束. 令 J 表示在副对角上为 1 的调换矩阵(exchange matrix). 用 J 右乘一个矩阵 A 等价于反转 A 的列的顺序，并且用左乘等价于反转 A 的行的顺序. 令 V 表示符号选择(sign-alternating)矩阵，即选择 ± 1 的对角矩阵. 用 V 右乘选择 A 的列的符号，而左乘选择 A 的行的符号. $H(z)$ 的多相分量与反射与反转分量顺序的 $H^{\mathrm{R}}(z)$ 的多相分量有关. 事实上，如果 $H(z)$ 长度是 Mm，并且 $H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l}H_l(z^M)$，那么

169

$$H^{\mathrm{R}}(z) = z^{-Mm+1}\sum_{l=0}^{M-1} z^{l}H_l(z^{-M}) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)}(z^{-mM+M}H_l(z^{-M})) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l}H_{M-1-l}^{\mathrm{R}}(z^M).$$

所以

$$(H^{\mathrm{R}})_l(z) = (H_{M-1-l})^{\mathrm{R}}(z),\tag{8.69}$$

并且，对于线性相位 $H(z)$，因为 $H^{\mathrm{R}}(z) = \pm H(z)$，所以

$$H_l(z) = \pm (H^{\mathrm{R}})_{M-1-l}(z).\tag{8.70}$$

引理 1 对于偶数 M，$H_p(z)$ 形如

成对平移对称

$$\begin{bmatrix} W_0(z) & W_1(z) \\ JW_0(z)V & (-1)^{M/2}JW_1(z)V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0(z) & W_1(z) \\ W_0(z)V & (-1)^{M/2}W_1(z)V \end{bmatrix}\tag{8.71}$$

成对共轭平移对称

$$\begin{bmatrix} W_0(z) & W_1(z)J \\ JW_1^{\mathrm{R}}(z)V & (-1)^{M/2}JW_0^{\mathrm{R}}(z)JV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0(z) & W_1(z)J \\ W_1^{\mathrm{R}}(z)V & (-1)^{M/2}W_0^{\mathrm{R}}(z)JV \end{bmatrix}\tag{8.72}$$

线性相位

$$\begin{bmatrix} W_0(z) & D_0W_0^R(z)J \\ W_1(z) & D_1W_1^R(z)J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0(z) & D_0W_0^R(z) \\ W_1(z) & D_1W_1^R(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \tag{8.73}$$

或

$$Q\begin{bmatrix} W_0(z) & W_0^R(z)J \\ W_1(z) & -W_1^R(z)J \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} W_0(z) & W_0^R(z) \\ W_1(z) & -W_1^R(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \tag{8.74}$$

170

线性相位或成对共轭平移

$$\begin{bmatrix} W_0(z) & DW_0^R(z)J \\ JDW_0(z)V & (-1)^{M/2}JW_0^R(z)JV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0(z) & DW_0^R(z)J \\ DW_0(z)V & (-1)^{M/2}W_0^R(z)JV \end{bmatrix} \tag{8.75}$$

线性相位或成对平移

$$\begin{bmatrix} W_0(z) & DW_0^R(z)J \\ JW_0(z)V & (-1)^{M/2}JDW_0^R(z)JV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & JD \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0(z) & DW_0^R(z)J \\ DW_0(z)V & (-1)^{M/2}W_0^R(z)JV \end{bmatrix} \tag{8.76}$$

因此，对于除了成对平移对称之外的所有对称为了生成 $H_p(z)$，我们需要一个结构来生成一对矩阵和它们的反射(即 $W_0(z)$，$W_1(z)$，$W_0^R(z)$和 $W_1^R(z)$)．在数量的情形中，有两个著名的生成这样的对的点阵结构．第一个是正交点阵[VH88]，而第二个是线性预测点阵[RS83]．一个 K 阶正交点阵用乘积

$$\left\{\prod_{i=0}^{K}\begin{bmatrix} a_i & z^{-1}b_i \\ -b_i & z^{-1}a_i \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_0(z) & Y_1(z) \\ -Y_1^R(z) & Y_0^R(z) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} X(z).$$

产生．这个点阵总是可逆的(除非 a_i 和 b_i 都是零)，并且逆是非构成原因的，因为

$$\begin{bmatrix} a_i & z^{-1}b_i \\ -b_i & z^{-1}a_i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_i^2+b_i^2}\begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ zb_i & za_i \end{bmatrix}.$$

正如我们看到的，这个点阵在 2 带有限脉冲响应酉调制滤波器组的理论中起着基础作用．K 阶的双曲点阵产生乘积

$$\left\{\prod_{i=0}^{K}\begin{bmatrix} a_i & z^{-1}b_i \\ b_i & z^{-1}a_i \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_0(z) & Y_1(z) \\ Y_1^R(z) & Y_0^R(z) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} X(z).$$

其中 $Y_0(z)$和 $Y_1(z)$是 K 阶的．只有当 $a_i^2 \neq b_i^2$(或等价地，$(a_i+b_i)/2$和$(a_i-b_i)/2$非零)时，这个点阵是可逆的，在这种情形中，逆是不需要原因的，因为

$$\begin{bmatrix} a_i & z^{-1}b_i \\ b_i & z^{-1}a_i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_i^2-b_i^2}\begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ -zb_i & za_i \end{bmatrix}.$$

因为矩阵$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix}$是正交的，当且仅当$\{a_i, b_i\} = \{\pm 1, 0\}$，或者$\{a_i, b_i\} = \{0, \pm 1\}$，用点阵产生的 2×2 矩阵不是酉的．

形式上，显然，如果我们代替数量 a_i 和 b_i 为$M/2 \times M/2$的方阵，那么就可以产生这两

个点阵的矩阵形式，然后这可以用于产生我们考虑的具有对称性的滤波器组．稍后我们将看到，这两个点阵能产生酉矩阵，并且对于成对共轭平移、线性相位和成对共轭平移以及线性相位对称，这将得到有限脉冲响应酉的 $H_p(z)$ 的一种参数化．我们把正交点阵的推广

171

称为反对称点阵，把双曲点阵的推广称为对称点阵，这由乘积的形式可以明显地看出．因为反对称点阵不能产生一个酉矩阵传递函数(在数量的情形中，产生的 2×2 传递函数总是酉的)．反对称点阵用乘积

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\prod_{i=1}^{K}\begin{bmatrix} A_i & z^{-1}B_i \\ -B_i & z^{-1}A_i \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ -B_0 & A_0 \end{bmatrix} \tag{8.77}$$

定义，其中 A_i 和 B_i 是$M/2\times M/2$的常数方阵．容易验证 $X(z)$形如

$$X(z) = \begin{bmatrix} Y_0(z) & Y_1(z) \\ -Y_1^{R}(z) & Y_0^{R}(z) \end{bmatrix}, \tag{8.78}$$

给定 $X(z)$，它的可逆性等价于常数矩阵的可逆性

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -B_i & A_i \end{bmatrix} \quad 因为 \quad \begin{bmatrix} A_i & z^{-1}B_i \\ -B_i & z^{-1}A_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -B_i & A_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & z^{-1}I \end{bmatrix}, \tag{8.79}$$

这与复数矩阵 $C_i=A_i+iB_i$ 和 $D_i=A_i-iB_i$ 的可逆性有关，因为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & D_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -iI \\ I & iI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -B_i & A_i \end{bmatrix}.$$

进而，矩阵的正交性等价于复数矩阵 C_i 的酉性(因为 D_i 恰好是它的埃尔米特共轭)．因为一个$M/2\times M/2$的任意复矩阵恰好由 $2\binom{M/2}{2}$ 个参数决定，每个矩阵$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -B_i & A_i \end{bmatrix}$具有许多自由度．显然，当这些矩阵是正交的时，$X(z)$是酉的(在单位圆上)并且 $X^{T}(z^{-1})X(z)=I$．对于酉的 $X(z)$，稍后将证得，反之也成立．

对称点阵用乘积

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\prod_{i=1}^{K}\begin{bmatrix} A_i & z^{-1}B_i \\ B_i & z^{-1}A_i \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & A_0 \end{bmatrix} \tag{8.80}$$

定义．再次，A_i 和 B_i 是常数方阵，并且容易验证写为上述一个乘积的 $X(z)$形如

$$X(z) = \begin{bmatrix} Y_0(z) & Y_1(z) \\ Y_1^{R}(z) & Y_0^{R}(z) \end{bmatrix} \tag{8.81}$$

$X(z)$的可逆性等价于下面矩阵可逆性：

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ B_i & A_i \end{bmatrix} \quad 因为 \quad \begin{bmatrix} A_i & z^{-1}B_i \\ B_i & z^{-1}A_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ B_i & A_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & z^{-1}I \end{bmatrix}, \tag{8.82}$$

这转而等价于 $C_i=A_i+B_i$ 和 $D_i=A_i-B_i$ 的可逆性，因为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & D_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ B_i & A_i \end{bmatrix}$$

172

常数矩阵的正交性等价于实矩阵 C_i 和 D_i 的正交性，并且因为每个$M/2 \times M/2$的实的正交矩阵由$\binom{M/2}{2}$个参数决定，常数正交矩阵有 $2\binom{M/2}{2}$个自由度．显然，此时矩阵正交，即 $X^{\mathrm{T}}(z^{-1})X(z) = I$. 对于双曲点阵这也成立，反之亦真．

我们现在给出一个定理，它给出了具有我们考虑的对称性的酉滤波器组的参数化(证明见[GB94b])．

定理 49 令 $X(z)$是次数为 K 的 $M \times M$ 酉多项式矩阵．随 $X(z)$或者形如(8.78)，或者形如(8.81)而定，它由一个 K 阶反对称点阵或者对称点阵产生．

8.7.1 酉 $H_p(z)$的表示特征——成对平移对称

对于(8.71)中的成对平移对称，$H_p(z)$的形式可以用一个置换简化．令 P 是置换矩阵，它交换第一列与最后一列、第三列与倒数第三列，等等．即

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么，在(8.71)中的矩阵$\begin{bmatrix} W_0(z) & W_1(z) \\ W_0(z)V & (-1)^{M/2}W_1(z)V \end{bmatrix}$可以改写为$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} W_0'(z) & W_1'(z) \\ -W_0'(z) & W_1'(z) \end{bmatrix}P$，所以

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0(z) & W_1(z) \\ W_0(z)V & (-1)^{M/2}W_1(z)V \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & W_1'(z) \\ -W_0'(z) & W_1'(z) \end{bmatrix}P$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & 0 \\ 0 & W_1'(z) \end{bmatrix}P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ -J & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & 0 \\ 0 & W_1'(z) \end{bmatrix}P.$$

对于成对平移对称，我们有下述酉滤波器组的参数化．

173

定理 50(酉成对平移对称) K 阶的 $H_p(z)$形成一个具有成对平移对称的酉完全重构滤波器组，当且仅当存在 K 阶酉的 $M/2 \times M/2$ 矩阵 $W_0'(z)$和 $W_1'(z)$，使得

$$H_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ -J & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & 0 \\ 0 & W_1'(z) \end{bmatrix}P. \tag{8.83}$$

一个具有成对平移对称的酉 $H_p(z)$恰好由 $2(M/2-1)(L_0+L_1)+2\binom{M/2}{2}$个参数决定，其

中 $L_0 \geq K$ 和 $L_1 \geq K$ 分别是 $W_0'(z)$ 和 $W_1'(z)$ 的 McMillan 次数.

8.7.2 酉 $H_p(z)$ 的表示特征——成对共轭平移对称

在这种情形下

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0(z) & W_1(z)J \\ W_1^{\mathrm{R}}(z)V & (-1)^{M/2}W_0^{\mathrm{R}}(z)JV \end{bmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0' & W_1'J \\ -(W_1')^{\mathrm{R}} & (W_0')^{\mathrm{R}}J \end{bmatrix} P$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0' & W_1' \\ -(W_1')^{\mathrm{R}} & (W_0')^{\mathrm{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} P.$$

因此，由引理 1，具有成对共轭平移对称的酉滤波器组 $H_p(z)$ 可以参数化如下：

定理 51 $H_p(z)$ 形如一个 K 阶具有成对共轭平移对称的酉滤波器组，当且仅当

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \left\{ \prod_{i=1}^{K} \begin{bmatrix} A_i & z^{-1}B_i \\ -B_i & z^{-1}A_i \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ -B_0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} P, \tag{8.84}$$

其中 $\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -B_i & A_i \end{bmatrix}$ 是常数正交矩阵. $H_p(z)$ 由 $2K\binom{M/2}{2}$ 个参数特征化.

8.7.3 酉 $H_p(z)$ 的表示特征——线性相位对称

对于线性相位情形，

$$H_p(z) = Q \begin{bmatrix} W_0(z) & W_0^{\mathrm{R}}(z) \\ W_1(z) & -W_1^{\mathrm{R}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} Q \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0(z) + W_1(z) & W_0^{\mathrm{R}}(z) - W_1^{\mathrm{R}}(z) \\ W_0(z) - W_1(z) & W_0^{\mathrm{R}}(z) + W_1^{\mathrm{R}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} Q \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0'(z) & W_1'(z) \\ (W_1')^{\mathrm{R}}(z) & (W_0')^{R}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}.$$

[174] 所以，我们有下述定理：

定理 52 K 阶的 $H_p(z)$ 形成一个具有线性相位滤波器的酉滤波器组当且仅当

$$H_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \left\{ \prod_{i=1}^{K} \begin{bmatrix} A_i & z^{-1}B_i \\ B_i & z^{-1}A_i \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \tag{8.85}$$

其中 $\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ B_i & A_i \end{bmatrix}$ 是常数正交矩阵. $H_p(z)$ 由 $2K\binom{M/2}{2}$ 个参数特征化.

8.7.4 酉 $H_p(z)$ 的表示特征——线性相位和成对共轭平移对称

在此情形下，$H_p(z)$ 用

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0(z) & DW_0^{\mathrm{R}}(z)J \\ DW_0(z)V & (-1)^{M/2}W_0^{\mathrm{R}}(z)JV \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & D(W_0')^{R}(z)J\\ -DW_0'(z) & (W_0')^{R}(z)J\end{bmatrix}P$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & D\\ -D & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & 0\\ 0 & (W_0')^{R}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}P$$

给出．所以我们证明了下述定理：

定理 53 K 阶的 $H_p(z)$ 形成一个具有线性相位和成对共轭平移对称滤波器的酉滤波器组，当且仅当存在一个酉的 K 阶 $M/2\times M/2$ 的矩阵 $W_0'(z)$，使得

$$H_p(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & D\\ -JD & J\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & 0\\ 0 & (W_0')^{R}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}P. \tag{8.86}$$

在这种情形下，$H_p(z)$ 恰好由 $(M/2-1)L+\binom{M/2}{2}$ 个参数决定，其中 $L\geqslant K$ 是 $W_0'(z)$ 的 McMillan 次数．

8.7.5 酉 $H_p(z)$ 的表示特征——线性相位和成对平移对称

由前面的结果，我们有下述结果：

定理 54 K 阶的 $H_p(z)$ 形成一个具有线性相位和成对平移对称滤波器的酉滤波器组，当且仅当存在一个酉的 K 阶 $M/2\times M/2$ 的矩阵 $W_0'(z)$，使得

$$H_p(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & D\\ -J & JD\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0'(z) & 0\\ 0 & (W_0')^{R}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}P. \tag{8.87}$$

$H_p(z)$ 恰好由 $(M/2-1)L+\binom{M/2}{2}$ 个参数决定，其中 $L\geqslant K$ 是 $W_0'(z)$ 的 McMillan 次数．

注意到，定理 50 到定理 54 对于具有所讨论对称性(并且在滤波器上限制适当的长度)的酉滤波器组给出完善的特征化．然而，如果在上述定理中，只要求矩阵 $W_0'(z)$ 和 $W_1'(z)$ 在单位圆上是可逆的(并且不是酉的)，那么上述结果给出生成具有所考虑的对称性的非酉完全重构滤波器组的一种方法．然而要注意，在非酉的情形中，这不是所有这样的滤波器组的一种完全参数化．

175

8.8 线性相位小波紧框架

一个酉(有限脉冲响应)滤波器组产生一个紧支撑小波紧框架(WTF)的充分必要条件是，在滤波器组中的低通滤波器 h_0 满足线性约束[GB92c]

$$\sum_n h_0(n)=\sqrt{M}. \tag{8.88}$$

我们现在研究和特征化，对于具有对称性的酉滤波器组，如何约束 $H_p(z)$ 以实现小波紧框架．首先考虑成对平移对称的情形，在此情形下，$H_p(z)$ 是(8.83)中的参数化．我们

有一个小波紧框架当且仅当

$$H_p(z)\Big|_{z=1} \text{的第一行} = [1/\sqrt{M},\cdots,1/\sqrt{M}]. \tag{8.89}$$

在(8.83)中，因为 P 置换列，第一行是不改变的．因此，(8.89)等价于当 $z=1$ 时由

$$[\sqrt{2/M},\cdots,\sqrt{2/M}]$$

给出的 $W_0'(z)$ 和 $W_1'(z)$ 的第一行．这恰好是用$M/2$重的小波紧框架满足的条件．所以，$W_0'(z)$ 和 $W_1'(z)$ 都可给出 $M/2$ 重紧支撑小波紧框架．如果 $W_0'(z)$ 和 $W_1'(z)$ 的 McMillan 次数分别是 L_0 和 L_1，那么，它们分别用 $\binom{M/2-1}{2}+(M/2-1)L_0$ 和 $\binom{M/2-1}{2}+(M/2-1)L_1$ 个参数参数化．总之，具有成对平移对称的小波紧框架恰好能用 $2\binom{M/2-1}{2}+(M/2-1)(L_0+L_1)$ 个参数参数化．L_0 和 L_1 都大于或等于 K.

成对平移对称没有反映自己作为小波紧框架的尺度函数 $\psi_0(t)$ 和小波 $\psi_i(t)$ ($i\in\{1,\cdots,M-1\}$)的任一简单性质．然而，由设计和实现的观点，成对平移对称是有用的(因为减少参数的数量).

其次考虑成对共轭平移对称．由(8.84)我们看到，(8.89)等价于用

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \left\{\prod_{i=K}^{0}\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -B_i & A_i \end{bmatrix}\right\}$$

定义的矩阵 A 和 B 的第一行形如$[1/\sqrt{M}\cdots1/\sqrt{M}]$．这里，与成对平移对称的情形不同，我们只有一个小波紧框架的隐含的参数化．因为在成对平移对称的情形中，小波之间不存在简单的对称关系．

现在考虑线性相位情形．在这种情形下，可以看到[SVN93]小波还是线性相位的．如果定义

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \left\{\prod_{i=K}^{0}\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ B_i & A_i \end{bmatrix}\right\},$$

那么，可以验证，矩阵 $A+B$ 中的一行必须是形如$[\sqrt{2/M}\cdots\sqrt{2/M}]$的．这是小波紧框架的一个隐含参数化．

176

最后考虑具有成对共轭平移对称的线性相位的情形．在此情形下，小波也是线性相位的．由(8.86)可以验证，我们有一个小波紧框架当且仅当，对于 $z=1$，$W_0'(z)$的第一行等于向量$[\sqrt{2/M}\cdots\sqrt{2/M}]$．等价地，$W_0'(z)$给出一个 $M/2$ 重的小波紧框架．在此情形下，小波紧框架恰好用$\binom{M/2-1}{2}+(M/2-1)L$ 个参数参数化，其中 $L\geqslant K$ 是 $W_0'(z)$ 的 McMillan 次数．

8.9 线性相位调制滤波器组

我们描述调制滤波器组为：

1. 有具有非重叠的理想频率响应滤波器，如图 8-2 所示.
2. 在它们的实现中是与 DCT III/IV（或者等价地 DST III/IV)相关的.
3. 不允许线性相位滤波器组(即使原型滤波器可能是线性相位的).

在试着克服 3 时，Lin 和 Vaidyanathan 放弃 1 和 2 引入一类新的线性相位调制滤波器组[LV95]. 现在介绍他们的结果的一种推广，这是由统一调制滤波器组理论的观点得到的，像前面看到的那样，它具有这里介绍的这类新调制滤波器组. 这个观点的更详细的说明见[Gop96b].

这类新的调制滤波器组有 $2M$ 个分析滤波器，而有 M 带——每带由两个重叠滤波器共享. M 带是 M 点离散傅里叶变换带，如图 8-5 所示.

$$k_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & n \in \{0, M\} \\ 1 & \text{其他的} \end{cases} \tag{8.90}$$

调制滤波器组的两个广泛的类(与所有四个 DCT/DST 相联系[RY90])可以定义.

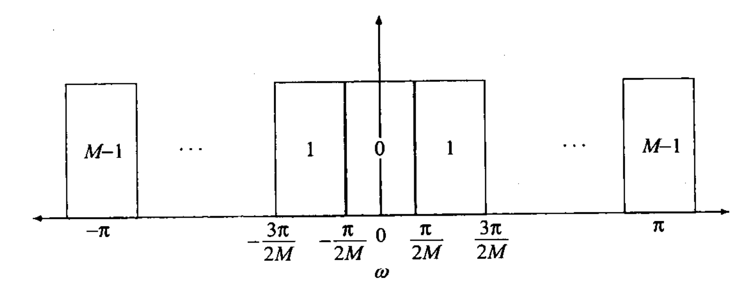


图 8-5 在 M 带离散傅里叶变换型滤波器组中的理想频率响应

177

基于 $2M$ 带滤波器组的 DCT/DST I/II

$$h_i(n) = k_i h(n) \cos\left(\frac{\pi}{M} i \left(n - \frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad i \in S_1 \tag{8.91a}$$

$$h_{M+i}(n) = k_i h(n - M) \sin\left(\frac{\pi}{M} i \left(n - \frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad i \in S_2 \tag{8.91b}$$

$$g_i(n) = k_i g(n) \cos\left(\frac{\pi}{M} i \left(n + \frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad i \in S_1 \tag{8.91c}$$

$$g_{M+i}(n) = -k_i g(n + M) \sin\left(\frac{\pi}{M} i \left(n + \frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad i \in S_2 \tag{8.91d}$$

集 S_1 和 S_2 的定义依赖于表 8-1 中表示的 α 的奇偶性. 当 α 是偶数时(即具有奇数 M 的 1

型或具有偶数 M 的2型），调制滤波器组依赖于 DCTI 和 DSTI. 当 α 是奇数时（即具有偶数 M 的1型或具有奇数 M 的2型），调制滤波器组依赖于 DCTII 和 DSTII. 在[LV95]介绍的线性相位调制滤波器组相应于一种特殊的情形，其中 $h(n)=g(n)$ 并且 α 是偶数. 上面的其他情形和它们的相应的完全重构的结果是新的.

表 8-1　A 类调制滤波器组：滤波器指标集 S_1 和 S_2

	S_1	S_2
α 是偶数，DCT/DST Ⅰ	$\mathcal{R}(M)\cup\{M\}$	$\mathcal{R}(M)\setminus\{0\}$
α 是奇数，DCT/DST Ⅱ	$\mathcal{R}(M)$	$\mathcal{R}(M)\setminus\{0\}\cup\{M\}$

在原型滤波器 h 和 g 上（对于上述滤波器组的两个模型）的完全重构约束恰好与前面研究的调制滤波器组的相同[Gop96b]. 当原型滤波器是线性相位时，这些滤波器组也是线性相位的. 一个有用的结果是，如果设计一个 M 带 B 类调制滤波器组，那么原型滤波器也能用于一个 A 类 $2M$ 带滤波器组.

8.10　线性相位调制小波紧框架

在什么条件下线性相位调制滤波器组产生小波紧框架（WTF）呢？为回答这个问题，方便的是使用一个稍微不同的点阵参数化，而不是使用 B 类调制滤波器组的参数化. 一个看似惊奇的结果是，一些 A 类酉调制滤波器组与小波紧框架无关. 更准确地，一个 A 类酉调制滤波器组与小波紧框架有关，仅当它是1型的.

$$\begin{bmatrix} P_{l,0}(z) & P_{l,1}^{\mathrm{R}}(z) \\ -P_{l,1}(z) & P_{l,0}^{\mathrm{R}}(z)\end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{M}}\left\{\prod_{k=k_{l-1}}^{1} T'(\theta_{l,k})\right\}T'(\theta_{l,0}), \tag{8.92}$$

其中

178

$$T'(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta_{l,k} & z^{-1}\sin\theta_{l,k} \\ -\sin\theta_{l,k} & z^{-1}\cos\theta_{l,k}\end{bmatrix}.$$

我们定义满足这个参数化的 Θ_l 如下：

$$\begin{bmatrix} P_{l,0(1)} & P_{l,1}^{\mathrm{R}}(1) \\ -P_{l,1}(1) & P_{l,0}^{\mathrm{R}}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\Theta_l) & \sin(\Theta_l) \\ -\sin(\Theta_l) & \cos(\Theta_l)\end{bmatrix}, \tag{8.93}$$

其中在有限频率响应情形,像前面一样 $\Theta_l=\sum_{k=0}^{k_l-1}\theta_{l,k}$. 1型 A 类调制滤波器组产生一个小波紧框架当且仅当,对于所有 $l\in\mathcal{R}(J)$,$\Theta_l=\frac{\pi}{4}$.

定理 55（调制小波紧框架定理）　1型 A 类调制滤波器组引起一个小波紧框架当且仅当 $\Theta_l=\frac{\pi}{4}$. 一个 B 类（1型或2型）调制滤波器组引起一个小波紧框架当且仅当 $\Theta_l=\frac{\pi}{4}+$

$\frac{\pi}{2M}\left(\frac{\alpha}{2}-l\right)$.

8.11 时变滤波器组树

滤波器组可以以级联方式应用以给出各种各样的分解．通过适当地设计滤波器，我们可以得到频率上的任意分辨．这使它们在属于各种不同频带或尺度现象的平稳信号的分析中特别有用．然而，对于非平稳的或者分段平稳的信号，这样的滤波器组树不满足．带着这种想法，我们转到有限长信号的滤波器组．

如果我们有了有限长信号的滤波器组理论，那么，逐段平稳信号可以用分别考虑每个构造相似的段来处理．对于有限长信号，若干解决滤波器组的方法存在，而我们按照在[GB95a]中的方法．如果把滤波器组树看作一种机器，取一个输入抽样并且每个瞬间产生一个输出，那么我们可以考虑每个瞬间改变机器(即每个瞬间改变滤波器系数)．另一方面，我们可以对于若干瞬间使用一个固定的机器，然后转换(switch)到另外的滤波器组树．前一种方法在[PV96]中研究．我们使用后一种方法，除影响设计分量滤波器组树之间的转换的有效方法之外，还导致区间的小波基理论[HKRV93，GB95a]．

令一个酉滤波器组的分析滤波器组的多相分量矩阵 $H_p(z)$ 形如(见(8.27))

$$H_p(z) = \sum_{k=0}^{K-1} h_p(k) z^{-k}. \tag{8.94}$$

这便于引入序列 $\breve{x}=[\cdots, x(0), x(-1), \cdots, x(-M+1), x(M), x(M-1), \cdots]$，它由置换 x 得到．那么

$$d = \breve{H}\breve{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \ddots & h_p(K-1) & h_p(K-2) & \cdots & h_p(0) & 0 & \ddots \\ & 0 & h_p(K-1) & \cdots & h_p(1) & h_p(0) & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \breve{x}, \tag{8.95}$$

179

和 H 是酉的，当且仅当 $\breve{H}$ 是酉的．由(8.28)推导出 $\breve{H}$(且因此 H)的一种因子化．如果 $V_0=\mathrm{diag}(V_0)$ 并且

$$V_i = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \ddots & P_i & I-P_i & 0 & \ddots \\ & 0 & P_i & I-P_i & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}, \quad \text{对于 } i \in \{1,\cdots,K-1\}, \tag{8.96}$$

$$\breve{H} = \prod_{i=K-1}^{0} V_i. \tag{8.97}$$

具有适当修改的因子 V_i 将用于作为有限长信号的基本建筑块．

现在考虑一个有限输入信号 $x=[x(0), x(1), \cdots, x(L-1)]$，其中 L 是 M 的倍数，

并且令 $\breve{x}=[x(M-1),\cdots,x(0),x(M),\cdots,x(L-1),\cdots,x(L-M)]$. 那么，有限向量 d(输出信号)用

$$d=\breve{H}\breve{x}\overset{\text{def}}{=}\begin{bmatrix} h_p(K-1) & \cdots & h_p(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_p(K-1) & \cdots & h_p(0) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & h_p(K-1) & \cdots & h_p(0) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h_p(K-1) & \cdots & h_p(0) \end{bmatrix}\breve{x} \tag{8.98}$$

给出，$\breve{H}$ 是一个$(L-N+M)\times L$ 矩阵，其中 $N=MK$ 是滤波器的长度．现在，因为 $\breve{H}$ 的行是相互规范正交的(即秩为 L)，我们可以从 $\breve{H}$ 的正交补增加 $N-M=M(K-1)$行形成，由 x 到一个增广的 d 酉阵的映射．为得到这些行的一个完整的描述，下面讨论 $H_p(z)$的因子化．定义 $L\times L$ 矩阵 $V_0=\text{diag}(V_0)$，并且对于 $i\in\{1,\cdots,K-1\}$，$(L-Mi)\times(L-Mi+M)$矩阵

$$V_i=\begin{bmatrix} P_i & I-P_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_i & I-P_i & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & P_i & I-P_i & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_i & I-P_i \end{bmatrix}. \tag{8.99}$$

那么通过引入 $\prod_{i=K-1}^{0}V_i$ 容易验证 $\breve{H}$. 因为每个因子(除 V_0 外)都有比行多 M 的列,所以通过增加适当的行可以得到酉矩阵．其实 $\begin{bmatrix} B_i \\ V_i \\ C_i \end{bmatrix}$ 是酉矩阵,其中 $B_j=[\Upsilon_j^{\mathrm{T}}(I-P_j)0\cdots0]$,$C_j=$

180 $[0\cdots0\ \Xi_j^{\mathrm{T}}P_j]$. 这里$\Xi$是 $\delta_i\times M$ 的左酉矩阵,它张成 P_i 的值域,即,$P_i=\Xi\Xi^{\mathrm{T}}$,并且$\mathcal{R}$是$(M-\delta_i)\times M$ 的左酉矩阵,它张成$I-P_i$的值域,即 $I-P_i=\Upsilon\Upsilon^{\mathrm{T}}$. 显然,$[\mathcal{R}_i\Xi_i]$ 是酉矩阵. 进而,如果定义 $T_0=V_0$,并且对于 $i\in\{1,\cdots,K-1\}$,

$$T_i=\begin{bmatrix} I_{(M-\delta_i)(i-1)} & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & V_i & 0 \\ 0 & C_i & 0 \\ 0 & 0 & I_{\delta_i(i-1)} \end{bmatrix}$$

那么每个因子 $\boldsymbol{T}_i$ 是一个大小为 $L-N+M$ 的酉方阵，并且

$$\prod_{i=K-1}^{0}\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{V}_0\\ \vdots\\ \breve{\boldsymbol{H}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{V}_0\end{bmatrix}, \tag{8.100}$$

是作用于数据上的酉矩阵．相应的作用于 $\boldsymbol{x}$(而不是 $\breve{\boldsymbol{x}}$)上的酉矩阵形如 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{W}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{U}$ 在由(8.101)给出的 $(K-1)$ 个集合中有输入滤波器的 $MK-M-\Delta$ 行，而 $\boldsymbol{W}$ 在由(8.102)给出的 $(K-1)$ 个中有输出滤波器的 Δ 行．

$$\Upsilon_j(I-P_j)[h_p^j(j-1)J\quad h_p^j(j-2)J\quad\cdots\quad h_p^j(0)J], \tag{8.101}$$

$$\Xi_j P_j[h_p^j(j-1)J\quad h_p^j(j-2)J\quad\cdots\quad h_p^j(0)J], \tag{8.102}$$

其中 J 是调换矩阵(即沿副对角的一个置换矩阵)，并且

$$H_p^j(z)=\prod_{i=j-1}^{1}[I-P_i+z^{-1}P_i]V_0\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=0}^{j-1}h_p^j(i)z^{-i}. \tag{8.103}$$

$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 的行分别形成输入滤波器和输出滤波器．显然，它们不是唯一的．输入/输出性质在下式中获得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{W}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}. \tag{8.104}$$

例如，[Dau88a]中的四系数 Daubechies 滤波器的情形，有一个输入滤波器和输出滤波器．

$$\begin{bmatrix}0.8660 & 0.5000 & 0 & 0\\ -0.1294 & 0.2241 & 0.8365 & 0.4830\\ -0.4830 & 0.8365 & -0.2241 & -0.1294\\ 0 & 0 & -0.5000 & 0.8660\end{bmatrix}. \tag{8.105}$$

如果输入信号是右旁的(即支撑在{0，1，…})，那么相应的滤波器组就只有输入滤波器．如果滤波器组是对于左旁信号的，那么就只有输出滤波器．基于上述讨论，我们可以考虑滤波器组之间的转换(在无限扩展的输入信号上的操作)．考虑由 1 带到 M 带的滤波器组的转换．直到 $n=-1$，输入与输出一样．在 $n=0$，我们尽可能快地转换到一个 M 带滤波器组．转移是用 M 带滤波器组的输入滤波器完成．时变滤波器组的输入/输出是 [181]

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ 0 & \boldsymbol{U}\\ 0 & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}. \tag{8.106}$$

其次考虑由 M 带滤波器组到1带滤波器组的转换．直到 $n=-1$，M 带滤波器组是可实施的．从 $n=0$ 向前，输入漏泄到输出．在此情形中，存在输出滤波器，这个输出滤波器相应于冲洗第一个滤波器组中在 $n=0$ 实现的情形．

$$d=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H} & 0 \\ \boldsymbol{W} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{array}\right]\boldsymbol{x}. \tag{8.107}$$

最后，由一个 M_1 带滤波器组到一个 M_2 带滤波器组的转换可以如下完成：

$$d=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H}_1 & 0 \\ \boldsymbol{W}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{U}_2 \\ 0 & \boldsymbol{H}_2 \end{array}\right]\boldsymbol{x}. \tag{8.108}$$

转移区域用第一个滤波器组的输出滤波器和第二个滤波器组的输入滤波器给出．显然，转移滤波器是急剧的（它们不重叠）．我们可以得到重叠的转移滤波器如下：对于矩阵 $\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{W}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{U}_2 \end{array}\right]$ 的行空间，用任何正交基去代替它们．例如，考虑具有长度4和长度6的 Daubechies 滤波器的2带滤波器组之间的转换．在此情形下，有一个输出滤波器（$\boldsymbol{W}_1$）和两个输入滤波器（$\boldsymbol{U}_2$）．

8.11.1 生长一棵滤波器组树

考虑在 $n=0$ 生长一棵滤波器组树，它通过用一个 M 带滤波器组代替树（树的生长点）中某一输出带得到．这等价于在树的生长点由一个1带到 M 带滤波器组的转换．相应于这个变化的转移滤波器是与 M 带滤波器组的输入滤波器有关的．事实上，每个转移滤波器是在树的生长点上的一个输入滤波器的纯粹的实现，这是从输入的远景而不是在树的生长点的输出看到的．设由输入到输出"生长"带的映射如图8-6所示．转移滤波器由图8-7的系统中给出，这是用新添加滤波器组的输入滤波器起动的．每个转移滤波器用从相应的时间反转输入滤波器到现存树的相应支的综合组得到．

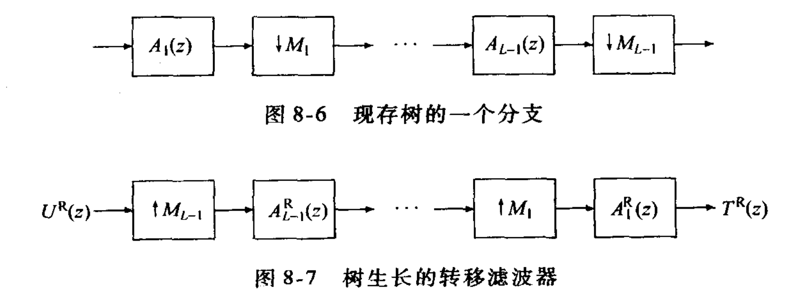


图8-6 现存树的一个分支

图8-7 树生长的转移滤波器

8.11.2 修剪一棵滤波器组树

在树的修剪更一般的情形中，如果由输入到修剪点的映射如图 8-6 中给出的，那么转移滤波器由图 8-8 给出．

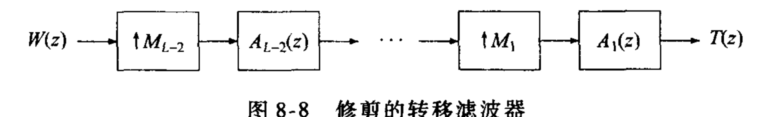


图 8-8 修剪的转移滤波器

8.11.3 区间的小波基

通过取任意的酉时变滤波器组树的有效的输入/输出映射，我们容易得到时变的离散时间小波包基．显然，对于单边的和有限的信号也有这样的基．因为它们由酉建筑块建立，所以这些基是规范正交的．现在描述连续时间时变小波基的构造．下面是(借助于输入/输出函数的数目)得到的最经济的连续时间时变小波基．

8.11.4 $L^2([0, \infty))$的小波基

回忆使$\sum_n h_0(n) = \sqrt{M}$的一个 M 带酉滤波器组(具有综合滤波器$\{h_i\}$)引起$L^2(\mathbf{R})$的一个 M 带小波紧框架．如果

$$W_{i,j} = \text{Span}\{\psi_{i,j,k}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{M^{j/2}\psi_i(M^j t - k)\} \quad 对于 k \in \mathbf{Z}, \tag{8.109}$$

那么，$W_{0,j}$形成$L^2(\mathbf{R})$的一个多分辨分析，满足

$$W_{0,j} = W_{0,j-1} \oplus W_{1,j-1} \cdots \oplus W_{M-1,j-1} \quad \forall j \in \mathbf{Z}. \tag{8.110}$$

在[Dau92]中，Daubechies 勾画了属于 Meyer 的构造 $L^2([0, \infty))$的一组小波基的方法．映射 $W_{0,j}$到 $W_{0,j}^{\text{half}}$，$W_{0,j}^{\text{half}}$是用限制$\psi_{0,j,k}(t)$于 $t>0$ 张成的空间．我们给出基于下述概念的一种不同的构造．对于 $k \in \mathbf{N}$，$\psi_{i,j,k}(t)$的支撑在$[0, \infty)$中．(在(8.109)中)带着这个限制定义空间 $W_{i,j}^+$. 当$j \to \infty$时(因为 $W_{0,j} \to L^2(\mathbf{R})$)，所以 $W_{0,j}^+ \to L^2([0, \infty))$. 因此，对于 $W_{0,j}^+$有一个多分辨分析对于得到 $L^2([0, \infty))$的一组小波基是充分的．用 $W_{i,j}^+$代替 $W_{i,j}$，(8.110)不成立，因为 $W_{0,j}^+$大于在下个比较粗的尺度上构成的直和．令$\mathcal{U}_{j-1}$是这个差空间：

182~183

$$W_{0,j}^+ = W_{0,j-1}^+ \oplus W_{1,j-1}^+ \cdots \oplus W_{M-1,j-1}^+ \oplus \mathcal{U}_{j-1} \tag{8.111}$$

如果能求得$\mathcal{U}_i$的一组规范正交基，那么我们就具有了 $L^2([0, \infty))$的一个多分辨分析．

我们如下继续进行．(对于分析滤波器)构造具有综合滤波器$\{h_i\}$的滤波器组的输入滤波器．(对于综合滤波器)时间反转它们得到输入滤波器．如果 Δ 是综合滤波器的 McMillan 次数，那么存在 Δ 个输入滤波器．令 $u_i(n)$表示第 i 个综合输入滤波器．定义输入函数

$$\mu_l(t) = \sqrt{M}\sum_{k=0}^{L_1-1} u_l(k)\psi_0(Mt-k), \quad l \in \{0, \cdots, \Delta-1\}. \tag{8.112}$$

$\mu_i(t)$在$\left[0,\ \frac{L_1-1}{M}+\frac{N-1}{M-1}\right]$上是紧支撑的．令$\mathcal{U}_j=\mathrm{Span}\{\mu_{l,j}\}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Span}\{M^{j/2}\mu_i(M^jt)\}$．考虑在右旁信号上这个完全重构滤波器组的分析和综合步的一步，容易得到(8.111)成立．所以

$$\{\psi_{i,j,k}\mid i\in\{1,\cdots,M-1\},j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{N}\}\cup\{\mu_{i,j}\mid i\in\{0,\cdots,\Delta-1\},j\in\mathbf{Z}$$

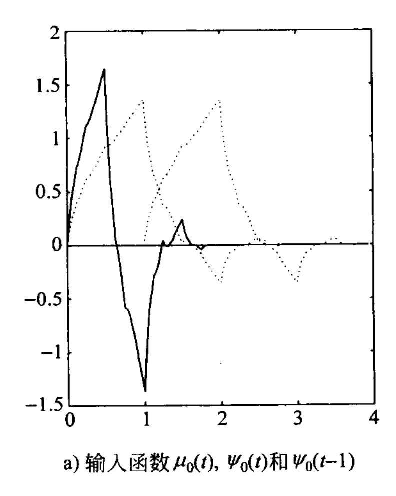
对于$L^2([0,\ \infty))$形成一个小波紧框架．如果由$L^2(\mathbf{R})$的一组规范正交基出发，对于$L^2([0,\ \infty))$新构造的基是一组规范正交基．事实上，如果$\{\psi_0(t-k)\}$是一个规范正交系统

$$\int_{t\geqslant 0}\mu_l(t)\psi_i(t-n)\,\mathrm{d}t=\sum_k u_l(k)h_i(Ml+k)=0,\tag{8.113}$$

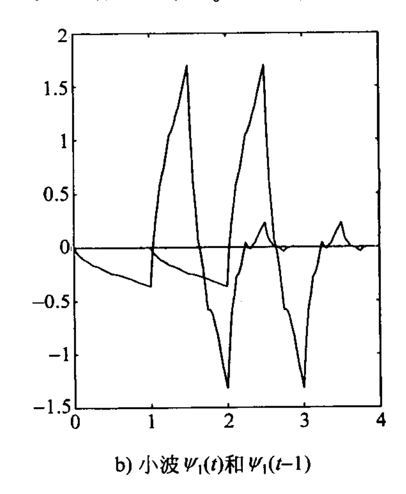
和

$$\int_{t\geqslant 0}\mu_l(t)\mu_m(t)\,\mathrm{d}t=\sum_k u_l(k)u_m(k)=0.\tag{8.114}$$

$\mathcal{U}_j$的维数恰好是考虑作为综合滤波器组的滤波器的尺度滤波器和小波滤波器的多相分量矩阵的 McMillan 次数．恰有与输入滤波器一样多的输入函数，并且这些函数的支撑借助于相应的输入滤波器的长度明确地给出．图 8-9 展示尺度函数、小波、它们的整数平移以及相应于 Daubechies 四系数小波的单个输入函数．在此情形下，$u_0=\{-\sqrt{3}/2,\ 1/2\}$.



a) 输入函数$\mu_0(t)$, $\psi_0(t)$和$\psi_0(t-1)$



b) 小波$\psi_1(t)$和$\psi_1(t-1)$

图 8-9

8.11.5 $L^2((-\infty,\ 0])$的小波基

我们可以从$L^2([0,\ \infty))$的一组小波基出发，并且关于$t=0$反射所有的函数．这等价于交换滤波器组的分析滤波器和综合滤波器．我们给出一个独立的讨论．对于$L^2(\mathbf{R})$从具有函数

$$\psi_i(t) = \sqrt{M}\sum_{k=0}^{N-1} h_i(k)\psi_0(Mt+k) \tag{8.115}$$

的一个小波紧框架出发，函数支撑在$[-\frac{N-1}{M-1}, 0]$. 尺度滤波器和小波滤波器组成这种情形的分析组. 令 Δ 是分析组的 McMillan 次数，并且令$\{w_i\}$是(分析)输出滤波器. 定义输出函数

$$v_l(t) = \sqrt{M}\sum_{k=0}^{L_l-1} w_l(k)\psi_0(Mt+k), \quad l \in \{0,\cdots,\Delta-1\}. \tag{8.116}$$

$\mathcal{W}_j = \mathrm{Span}\{M^{j/2}v_i(M^jt)\}$，且对于 $k\in\mathbf{N}$，$W_{i,j}^- = \mathrm{Span}\{\psi_{i,j,k}\} \overset{\text{def}}{=} \{M^{j/2}\psi_i(M^jt+k)\}$. 那么，当 $j\to\infty$ 时，$W_{0,j}^-\to L^2((-\infty, 0])$，并且

$$\{\psi_{i,j,k} \mid i \in \{1,\cdots,M-1\}, j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}\} \cup \{v_{i,j} \mid i \in \{0\cdots,\Delta-1\}, j \in \mathbf{Z}\}$$

形成 $L^2((-\infty, 0])$的一个小波紧框架. 这组基的规范正交性等价于它的母体基在直线上的规范正交性. 具有(相应于 $M=3$, $N=6$)的一个输出函数的 1 型调制小波紧框架的例子在图 8-10 中给出.

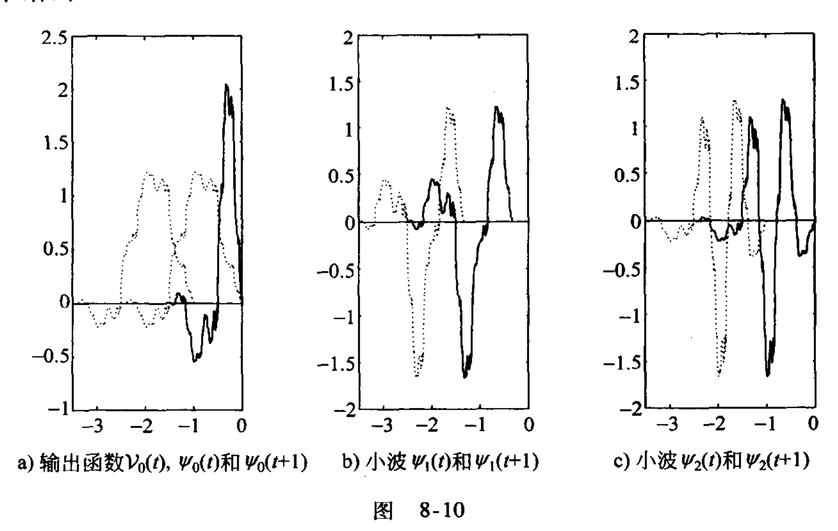


图 8-10

8.11.6 分段时变小波包基

使用上面概念，我们可以对于区间构造小波基，并且因而可以构造 $L^2(\mathbf{R})$的分段小波基. 我们可以写 $\mathbf{R}$ 为区间的一个邻接的并，并且在每个区间中使用不同的小波基. 每个区间将是用尺度函数、小波以及输入函数和输出函数的一种结合张成的. 例如，图 8-10 和图 8-7 一起相应于 $L^2(\mathbf{R})$的一组小波基，其中具有长度 6 的滤波器的一个 3 带小波基用于 $t<0$，并且具有长度 4 的滤波器的一个 2 带小波基用于 $t>0$. 当然，在一个转移左边的输出函数和这个转移右边的输入函数之间的重叠的次数，可以仅用相应

于这些函数的有限维空间中改变的坐标得到．延伸这些概念以得到分段小波包基也是直接的．

8.12　滤波器组和小波——总结

滤波器组是允许一个信号分解为子信号的结构——通常，以一个比较低的抽样速率．如果原信号可以由子信号重构，那么滤波器组称为完全重构滤波器组．对于完全重构，分析滤波器和综合滤波器必须满足一组双线性约束．这些约束可以由三种观点，即直接、矩阵以及多相陈述来观察．在完全重构滤波器组设计中，我们选择滤波器使最大化一个“好”的准则且满足完全重构约束．

酉滤波器组是完全重构滤波器的一个重要的类——它们给出信号的正交分解．对于酉滤波器组，完全重构约束在分析滤波器中是二次的，因为综合滤波器是分析滤波器的指标反转．所有的有限脉冲响应酉滤波器组可以有效地参数化．这导致容易设计(无约束最优化)和有效实现．有时我们可以强加结构约束适合好的准则．例如，调制滤波器组要求分析滤波器和综合滤波器分别是简单的分析原型滤波器和综合原型滤波器的调制．酉调制滤波器组存在，并且可以有效参数化．这允许我们有效地设计和实现具有多通道的滤波器组．在滤波器上可以强加其他的结构约束(例如，线性相位滤波器)，并且导致相应的酉滤波器组的参数化．(在树结构使用的)滤波器组的级联可以用于递归地分解信号．

在低通滤波器上具有一个额外的线性约束的每一个有限频率响应的酉滤波器组依附于一个小波紧框架．低通滤波器依附于尺度函数，而余下的滤波器每个都依附于小波．一个信号的小波展开系数可以用一个树结构计算，其中滤波器组递归地沿低通滤波器通道使用．具有较小的修改的酉滤波器组的参数化给出所有紧支撑小波紧框架的一种参数化．一般地，相应于一个酉滤波器组的小波是不正则的(即不光滑的)．通过在低通滤波器上进一步强加线性约束(正则性约束)，我们得到光滑的小波基．构造的滤波器组产生相应构造的小波基；调制的滤波器组依附于调制的小波基，且线性相位滤波器组依附于线性相位小波基．滤波器组级联——其中所有通道递归地分解，它们依附于小波包基．184～186

由时-频分析的观点，滤波器组树可以用于给出频率的任意分辨．为了得到任意的时间的分辨，我们必须使用局部基，或者以时间点在滤波器组树之间转换．对于时变滤波器组的技术可以用于产生分段小波基(即，时间轴的邻接段的一种不同的小波基)．最后，像刚刚酉滤波器组依附于小波紧框架，一般的具有少数附加约束的完全重构滤波器组依附于小波框架(或者双正交基)．187

第9章 离散小波变换的计算

虽然使用小波展开作为一个抽象的数学分析工具时，无限和与 $t \in \mathbf{R}$ 的连续描述是合适的，但作为一个实际的信号处理或数值分析工具，(9.1)中的函数或信号 $f(t)$ 只有借助于它的抽样或者额外的信息(例如，它是带限的)才可用．本章研究数值计算离散小波变换的实际问题．

9.1 有限小波展开和有限小波变换

信号 $f(t)$ 的小波展开首先在(1.9)中阐述，这里重复表示为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) \tag{9.1}$$

其中 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 对于感兴趣的信号空间(例如 L^2 空间)形成一组基或一个紧框架．初看起来，这个无穷级数展开，似乎与无限傅里叶级数或者香农抽样计算公式有同样的实际问题．在一种实用的情况下，这种小波展开(其中系数称为离散小波变换)通常更容易计算．在指标 k 上的时间求和与在指标 j 上的尺度求和，两者都能成为有限的，而仅具有一点误差甚至没有误差．

具有无限支撑的信号，借助于展开函数 $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ 的香农抽样展开[Pap77，Mar91]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(Tn)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}t - \pi n\right) \tag{9.2}$$

在一个点上需要一个无限和来计算 $f(t)$，因为 sinc 基函数具有无限支撑．对于小波展开，这未必是正确的，其中小波基函数可能具有有限支撑，所以，在(9.1)中只需要 k 上的一个有限和来计算任一点的 $f(t)$．

188

在(9.1)中，如(2.28)中那样，可以通过将尺度函数添加到基的集合而使尺度 j 的下限成为有限的．通过使用尺度函数，(9.1)中的展开式变成

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_{J_0,k} \rangle \varphi_{J_0,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=J_0}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t). \tag{9.3}$$

其中 $j = J_0$ 是分离表示的最粗糙的尺度．展开从任意的分辨水平或粗糙性开始，像第2章中(2.19)、(2.20)与(2.21)所表示的．由 $j = -\infty$ 到任一起始点 $j = J_0$，用尺度函数张成的空间包含所有用较低分辨率的小波张成的空间．这是指 $\mathcal{V}_{J_0} = \mathcal{W}_{-\infty} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_{J_0-1}$．在实际的情形中，这就是分离细节变得重要的尺度．对于具有有限支撑的信号(或者具有很集中的能量的信号)，可以这样选取尺度函数，即使得尺度函数的支撑与要分析的信号中感兴

趣的性质几乎是相同的.

这种选取类似于傅里叶级数展开中对于基正弦曲线的周期的选择. 如果基函数的周期选择得比信号的周期大，则大部分的变换用于描述信号的零点展开或边缘影响.

对于(9.1)中的尺度j，有限上限的选择是更复杂的，并且一般包括一些逼近. 事实上，对于$f(t)$的抽样是信号的一种精确描述，而信号本质上是带限的，并且抽样至少取在奈奎斯特(Nyquist)速率上(2倍于信号的傅里叶变换中的最高频率).

由信号抽样的离散傅里叶变换，计算一个连续信号的傅里叶级数的系数的问题，类似于询问怎样由信号抽样计算离散小波变换. 而回答是类似的. 抽样必须充分"稠密". 对于傅里叶级数，如果可以求得一个频率，在这个频率上信号有很小的能量(在这个频率上傅里叶系数很小)，那么这决定了奈奎斯特频率和必需的抽样速率. 对于小波展开，必须求得一个尺度，在这个尺度上有可以忽略的细节或能量. 如果这个尺度是$j=J_1$，那么信号可以写为

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f,\varphi_{J_1,k}\rangle \varphi_{J_1,k}(t), \tag{9.4}$$

或者，借助于小波，(9.3)变成

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f,\varphi_{J_0,k}\rangle \varphi_{J_0,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=J_0}^{J_1-1} \langle f,\psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}(t). \tag{9.5}$$

这假定了近似地$f\in V_{J_1}$，或等价地，$\| f-P_{J_1}f\| \approx 0$，其中$P_{J_1}$表示$f$到$\mathcal{V}_{J_1}$上的正交投影.

给定$f(t)\in \mathcal{V}_{J_1}$，则(9.5)的展开是精确的，我们分两步计算离散小波变换的系数.

1. 映射到最细的尺度：计算$\langle f, \varphi_{J_1,k}\rangle$.

189 2. 分析：计算$\langle f, \psi_{j,k}\rangle (j\in \{J_0, \cdots, J_1-1\})$与$\langle f, \varphi_{J_0,k}\rangle$.

对于充分大的J_1，由于$\int \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$，$\varphi_{J_1,k}(t)$可以用其质心的一个狄拉克脉冲逼近. 对于大的$j$，这给出

$$2^j\int f(t)\varphi(2^jt)\,\mathrm{d}t \approx \int f(t)\delta(t-2^{-j}m_0)\,\mathrm{d}t = f(t-2^{-j}m_0), \tag{9.6}$$

其中$m_0 = \int t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$是$\varphi(t)$的一阶矩. 所以，在$j=J_1$尺度上，尺度函数的系数是

$$c_{J_1}(k) = \langle f,\varphi_{J_1,k}\rangle = 2^{J_1/2}\int f(t)\varphi(2^{J_1}t-k)\,\mathrm{d}t = 2^{J_1/2}\int f(t+2^{-J_1}k)\varphi(2^{J_1}t)\,\mathrm{d}t, \tag{9.7}$$

这近似地是

$$c_{J_1}(k) = \langle f,\varphi_{J_1,k}\rangle \approx 2^{-J_1/2}f(2^{-J_1}(m_0+k)). \tag{9.8}$$

对于所有2正则小波(即具有二阶消失矩的正则小波，而不是哈尔小波——甚至在上述方程中，可以用M代替2，$m_0=0$)，我们可以证明，函数本身的抽样形成信号的尺度函数系数的三阶逼近[GB92b]. 也就是说，如果$f(t)$是一个二次多项式，那么

$$c_{J_1}(k) = \langle f,\varphi_{J_1,k}\rangle = 2^{-J_1/2}f(2^{-J_1}(m_0+k)) \approx 2^{-J_1/2}f(2^{-J_1}k). \tag{9.9}$$

因此，在实际应用中，最细的尺度 J_1 是由抽样速率决定的．通过重新尺度化尺度函数，并且适当地放大它，可以假定 $f(t)$ 的抽样等于尺度函数的系数．这些逼近可以通过置一些尺度函数矩为零变得更好，像在 coiflet 中那样．这些已在 6.8 节中讨论过．

最后，从另一方面考虑．如果信号具有有限支撑，并且给定 L 个抽样，那么有 L 个非零系数 $\langle f, \varphi_{J_1,k}\rangle$．然而，离散小波变换通常有多于 L 的系数，因为小波与尺度函数是由卷积和下抽样得到的．换句话说，一个 L 点信号的离散小波变换有多于 L 个点．考虑作为一个向量到另外一个向量的有限离散变换，这种情形是不希望出现的．在维数中发生这种展开的原因是，我们使用 L^2 的一组基表示有限持续的一个信号，比如说 $L^2[0, P]$．

当计算一个长信号的离散小波变换时，通常选取 J_0 以给出信号的缓慢变化或较长持续特性的小波描述．当信号具有有限支撑或者是周期的时，J_0 一般选取为使得对于整个信号或信号的一个周期有单个尺度系数．为揭示有限支撑信号的抽样长度与离散小波变换系数数目之间的差别，可以将零附加于 $f(t)$ 的抽样，或者可以像对离散傅里叶变换所做的那样，使信号成为周期的．

9.2 周期离散小波变换

如果 $f(t)$ 具有有限支撑，用

$$\tilde{f}(t) \sum_n f(t+Pn) \tag{9.10}$$

[190]

建立它的一种周期形式，其中周期 P 是一个整数．在这种情况下，$\langle f, \varphi_{j,k}\rangle$ 和 $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ 是具有周期 $P2^j$（如果 $j \geqslant 0$，而如果 $j<0$，具有周期 1）的 k 的一个周期序列，并且

$$d(j,k) = 2^{j/2}\int \tilde{f}(t)\psi(2^j t - k)\,\mathrm{d}t, \tag{9.11}$$

$$d(j,k) = 2^{j/2}\int \tilde{f}(t+2^{-j}k)\psi(2^j t)\,\mathrm{d}t = 2^{j/2}\int \tilde{f}(t+2^{-j}\ell)\psi(2^j t)\,\mathrm{d}t, \tag{9.12}$$

其中 $\ell = \langle k\rangle_{P2^j}(k \bmod P2^j)$，$l \in \{0, 1, \cdots, P2^j-1\}$．对于 J_0，一个明显的选择是 1．注意到，在这种情形下，给出信号的 $L=2^{J_1}$ 个抽样 $\langle f, \varphi_{J_1,k}\rangle$，小波变换恰好有 $1+1+2+2^2+\cdots+2^{J_1-1}=2^{J_1}=L$ 项．事实上，这给出一个线性的、可逆的离散变换，可以将其视为除去任一基本的连续过程，类似于除傅里叶变换或傅里叶级数之外的离散傅里叶变换．

至少有三种方法计算这种周期离散小波变换，并且是根据本章后面的式(9.25)、(9.26)和(9.27)计算的．第一种方法是在一个尺度上，对尺度系数与时间反转系数 $h(-n)$ 简单地做卷积，给出一个长 $L+N-1$ 的序列．这将在(9.27)中指出，并且程序在附录 C 的 dwt5.m 中．第二种方法通过把适当数目的 $c_j(k)$ 段连接在一起，然后用 $h(n)$ 与它做卷积，建立一个周期的 $\tilde{c}_j(k)$．这在(9.25)中描述，并且程序在附录 C 的 dwt.m 中．第三种方法构造一个周期的 $\tilde{h}(n)$，并且把它与 $c_j(k)$ 做卷积以实现(9.26)．研究一下 MATLAB 程序，以了解这些概念实际上是如何实现的．

因为离散小波变换不是平移不变的，所以离散小波变换的不同的实现可能给出不同的结果，这是由于信号和/或基函数平移了．取一个试验信号并比较具有不同循环平移的信号的离散小波变换．

使$f(t)$周期化可能引起在0与P的不连续性．为避免这种现象出现，对于$L^2[0, P]$有若干种构造规范正交基的方法[CDV93，HKRV92，HKRV93，GB95a]．所有这些构造(直接地或非直接地)使用时变滤波器组的概念．在所有这些构造中，基本思想是保留支撑在$[0, P]$中的基函数，去掉支撑在$[0, P]$外的基函数，并且在横过端点处用能保证完全性的特殊输入/输出函数代替基函数．选择这些边界函数，使得构造的基是规范正交的．这已在8.11节中讨论过了．处理边界的另一种方法是使用如3.4节中的“提升”．

9.3 离散小波变换计算的滤波器组结构和复杂性

借助于(9.5)的有限展开给定了一个信号的小波分析，离散小波变换(展开系数)可以像在第3章中描述的滤波器组和在第8章中扩展的滤波器组使用Mallat算法实现．使用由图3-4中滤波器的单边树结构和下抽样描述的直接计算，可以简单确定计算复杂性．

如果假定信号序列的长度是L，并且尺度滤波器系数$h(n)$的序列长度是N，那么，由信号的抽样$f(Tk)\approx c(J_1, k)$，计算在下一个尺度的每个尺度函数展开系数$c(J_1-1, k)$和小波展开系数$d(J_1-1, k)$的乘法的数目必定是LN．由于下抽样，计算下一个较低尺度的系数$c(J_2-1, k)$和$d(J_2-1, k)$仅需要一半，直至在$j=J_0$尺度只有一个系数．所以，乘法的总数目是

[191]

$$\text{乘法} = LN + LN/2 + LN/4 + \cdots + N \tag{9.13}$$

$$= LN(1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/L) = 2NL - N, \tag{9.14}$$

这关于L和N是线性的．需要的加法数目本质上是相同的．

如果信号的长度很长，本质上是无限的，则最粗糙的尺度J_0必须由所讨论的特定信号处理问题的目的决定．对于这种情形，每离散小波变换系数或每输入信号抽样需要的乘法数目是

$$\text{乘法}/\text{抽样} = N(2-2^{-J_0}). \tag{9.15}$$

根据尺度函数滤波器$h(n)$和小波滤波器$h_1(n)$(它们是正交镜像滤波器)在每个尺度上的关系，可以在它们之间使用点阵滤波器结构共享运算，这总是将计算复杂性减半．这是在第8章和[Vai92]叙述的．

9.4 周期情形

在许多实际应用中，信号是长度有限的(有限支撑)，并且可以处理为单个的“块状”，像傅里叶级数或离散傅里叶变换那样．如果分析的信号是长度有限的，使得

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0 & t > P \\ f(t) & 0 < t < P. \end{cases} \tag{9.16}$$

我们可以构造一个周期信号$\tilde{f}(t)$为

$$\tilde{f}(t) = \sum_n f(t + Pn), \tag{9.17}$$

然后考虑它的小波展开或离散小波变换．即使$f(t)$没有有限支撑，周期函数的这种构造仍然可以做，如果它的能量是集中的并且(9.17)中的一些重叠是允许的．

周期性质 1 如果$\tilde{f}(t)$是具有整数周期 P 的周期函数，满足$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t + Pn)$，那么，在尺度 J 的尺度函数展开系数和小波展开系数(离散小波变换项)是以 $2^J P$ 为周期的．

$$\text{如果} \tilde{f}(t) = \tilde{f}(t + P) \quad \text{那么} \tilde{d}_j(k) = \tilde{d}_j(k + 2^j P). \tag{9.18}$$

192

这由

$$\tilde{d}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\psi(2^j t - k)\,\mathrm{d}t = \int \tilde{f}(t + Pn)\psi(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \tag{9.19}$$

容易看到，用变量替换，变成

$$\tilde{d}_j(k) = \int \tilde{f}(x)\psi(2^j(x - Pn) - k)\,\mathrm{d}x = \int \tilde{f}(x)\psi(2^j x - (2^j Pn + k)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tilde{d}_j(k + 2^j Pn), \tag{9.20}$$

并且对于$\tilde{c}_j(k)$同样成立．

周期性质 2 尺度函数展开系数和小波展开系数(离散小波变换项)可以由$\tilde{f}(t)$与$\varphi(t)$和$\psi(t)$的内积计算，或者等价地，由$f(t)$与周期化的$\tilde{\varphi}(t)$和$\tilde{\psi}(t)$的内积计算．

$$\tilde{c}_j(k) = \langle \tilde{f}(t), \varphi(t) \rangle = \langle f(t), \tilde{\varphi}(t) \rangle \tag{9.21}$$

和

$$\tilde{d}_j(k) = \langle \tilde{f}(t), \psi(t) \rangle = \langle f(t), \tilde{\psi}(t) \rangle, \tag{9.22}$$

其中$\tilde{\varphi}(t) = \sum_n \psi(t + Pn)$ 和$\tilde{\psi}(t) = \sum_n \tilde{\psi}(t + Pn)$.

这可由

$$\tilde{d}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\psi(2^j t - k)\,\mathrm{d}t = \sum_n \int_0^P f(t)\psi(2^j(t + Pn) - k)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^P f(t) \sum_n \psi(2^j(t + Pn) - k)\,\mathrm{d}t, \tag{9.23}$$

$$\tilde{d}_j(k) = \int_0^P f(t)\,\tilde{\psi}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \tag{9.24}$$

看出，其中$\tilde{\psi}(2^j t - k) = \sum_n \psi(2^j(t + Pn) - k)$ 是周期化的伸缩后的小波．

周期性质 3 如果$\tilde{f}(t)$是具有周期 P 的周期函数，那么在(3.9)中计算离散小波变换系数的 Mallat 算法变成

$$\tilde{c}_j(k) = \sum_m h(m-2k)\,\tilde{c}_{j+1}(m), \tag{9.25}$$

或

$$\tilde{c}_j(k) = \sum_m \tilde{h}(m-2k)\,c_{j+1}(m), \tag{9.26}$$

或

$$\tilde{c}_j(k) = \sum_n c_j(k+Pn), \tag{9.27}$$

其中，对于(9.27)

193

$$c_j(k) = \sum_m h(m-2k)\,c_{j+1}(m). \tag{9.28}$$

小波系数的相应关系是

$$\tilde{d}_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)\,\tilde{c}_{j+1}(m) = \sum_m \tilde{h}_1(m-2k)\,c_{j+1}(m) \tag{9.29}$$

或

$$\tilde{d}_j(k) = \sum_n d_j(k+2^jPn) \tag{9.30}$$

其中

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)\,c_{j+1}(m) \tag{9.31}$$

以上是周期信号的离散小波变换的重要性质，特别地，为了使用一个块状算法，我们人为地由一个非周期的信号构造．它们不仅解释了周期信号的混淆现象的作用，而且还表明了怎样计算一个周期信号的离散小波变换．

9.5 周期离散小波变换的结构

如果$f(t)$本质上是无限长的，那么，离散小波变换可以作为时间的一个正在进行的或者连续的过程计算．换句话说，当将$f(t)$在一个充分高的速率上的抽样视为$c_{J_1}(k)$时，较低分辨率上的尺度函数系数和小波系数可连续地由滤波器组得出．这可由图3-4中的简单两步分析滤波器组看出．如果抽样来自尺度$J_1=5$，则尺度$j=4$的小波系数可以由一半输入速率的较低组得出．$j=3$的小波系数可以由1/4输入速率的下一个较低组得出，且$j=3$的尺度函数系数也可以由$\frac{1}{4}$输入速率的较高组得出．容易设想，更多步会在越来越低的速率上给出较低的分辨小波系数，而最后得到的总是在最低速率的尺度函数系数．

对于一个连续的过程，步数和最粗尺度上的分辨水平是任意的．当然，应该选择处理信号过程最慢的特征．重要的是要记住，较低的分辨尺度相应于较慢的抽样速率以及在该尺度上展开项的一个较大的平移步．这是为什么小波分析系统在高分辨尺度上给出好的时间局部化(但是粗劣的频率局部化)，而在低的或粗的尺度上给出好的频率局部化(但是粗劣的时间局部化)．

对于有限长度的信号或块状的小波过程，可以将输入的抽样看成是一个有限维的输入向量，将离散小波变换看成是一个方阵，并且将小波展开系数看成是一个输出向量．离散小波变换输出的常见结构是在较低一半的输出向量中放置第一个小波滤波器组的输出．下一个小波滤波器组的输出刚好放置在块的上边．如果信号的长度是一个 2 的幂，则可以将小波分解成刚好有一个小波系数和一个尺度函数系数．尺度相应于与信号长度相同的平移步的大小．分解不必要实现这样的水平．它可以停留在任一尺度上，仍然可以看成是一个离散小波变换，并且可以使用适当的综合滤波器组(或者一个矩阵逆)对它进行逆变换． 194

9.6 更一般的结构

Mallat 算法的单边树结构生成一个基本的离散小波变换．由图 3-4 中的滤波器组，我们可以设想放置一对滤波器，并且像对较高的尺度函数组的输出所做的那样，在较低的小波组的输出上进行下抽样．这可以继续到建立一个平衡树滤波器组的任一水平．得到的输出是“小波包”，并且是另一种正则小波分解．事实上，这种滤波器组树的“生长”，通常是在每个节点上自适应地应用一些准则，以决定是否增加另一个分支．

还有基本小波系统的另外的推广，它是使用除了 2 以外的一个尺度因子建立的．M 重尺度方程是

$$\varphi(t) = \sum_k h(k)\varphi(Mt-k).$$

并且得到的滤波器组树结构在每一步有一个尺度函数分支和 $M-1$ 个小波分支．得到的结构称为 M 带滤波器组，并且它也是一种正则小波分解．这在 7.2 节中叙述过了．

在许多应用中，要求用连续小波变换．为计算(1.11)和(7.105)的内积，我们可以使用数值积分计算，但这是非常慢的．一种替代的方法是使用离散小波变换逼近连续小波变换的抽样，正如离散傅里叶变换可以用于逼近傅里叶级数或傅里叶积分一样[nRGB91, RD92, VLU97].

从上面的讨论中可以看到，小波分析和综合的基本思想与滤波器组理论的基本思想大体上是一致的．事实上，滤波器组可以用于计算用 Mallat 算法的离散小波变换，并且一些修改和推广可能借助于滤波器组而不是借助于小波展开更容易看出或解释．滤波器组的内容在第 3 章中讨论，并在第 8 章中更详细地讨论过． 195

第 10 章　基于信号处理的小波及应用

本章简要地讨论若干应用领域，目的是表明发展了什么领域和什么工具，同时给出一些参考书、论文以及参考文献．事实上，在这样一个快速发展的新领域和一本入门书中，这些并不全面，而且也不可能是最新的．

本章从两个角度简要地讨论小波系统的应用．首先，我们看看小波如何作为信号去噪和压缩的一种工具．其次，我们很简单地列举一些问题，这里，这些工具的应用是有前景的，或者已经取得了重要成果．这些应用的细节超出了本书的范围，参考文献给出了阅读指南．

10.1　基于小波的信号处理

为了实现频域信号处理，可以取一个信号的傅里叶变换（或者傅里叶级数，或者离散傅里叶变换），用零（或者另外的常数）乘一些傅里叶系数，然后进行逆傅里叶变换．这可以完全地去掉一个信号的某些分量，而留下的分量则完全不变．同样，可以使用小波变换实现基于小波的小波域信号处理或者滤波．事实上，使用小波有时可以去掉或者分离一个信号在时间和频率两方面重叠的部分，而用习惯的基于傅里叶的技术有时可能做不到．

基于变换的信号处理的经典示例如图 10-1 所示，其中中心的“盒子”可以是线性的或者非线性的运算．处理的“动态”包括所有的线性变换和线性逆变换的运算．变换域处理运算不具有动态，它是一种代数运算．这里，动态是指过程依赖于现在和过去，而代数是指过程只依赖于现在．例如，作为一个滤波器组一部分的有限脉冲响应滤波器是动态的，每个输出依赖于现在的和有限多个过去的输入（见(3.11)）．一个信号的离散小波变换的逐点运算过程是静态的或代数的．它不依赖于过去的（或者将来的）值，而只依赖于现在的值．这个区分过程的非线性静态部分和线性动态部分的结构，可以考虑实际结果和理论结果，而使用一个一般的动态系统这是不可能的或很困难的．

196

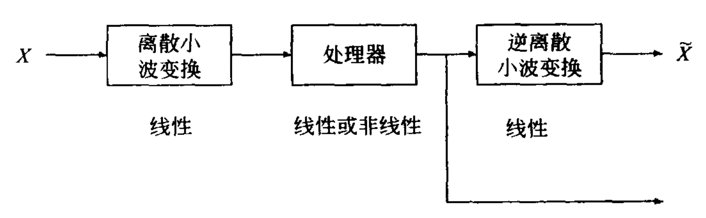


图 10-1　基于信号处理的变换

基于线性小波的信号处理由图 10-1 中的处理器块组成，是用某个常数集合（或许用零）乘信号的离散小波变换．如果不希望的信号或噪声可以与小波变换域中希望的信号区

分开来，那么可以用零乘其系数除去它们．这允许使用一个比傅里叶交换可以达到的更有效和更灵活的过程或滤波．这个总过程的结果是一个线性的、时变的过程，它远不是通用的线性的、时不变的过程．下节讨论利用离散小波变换的性质的一个例子，给出快速傅里叶变换的一种更快的计算方法．

10.2 使用离散小波变换逼近快速傅里叶变换

本节给出小波域信号处理的一个例子．与时域信号使用快速傅里叶变换(FFT)算法计算离散傅里叶变换不同，我们首先将信号变换到小波域，然后计算快速傅里叶变换，最后返回到信号域，它现在是傅里叶域．

近似计算离散傅里叶变换(DFT)的大多数方法包括只计算少数输出点(修剪)、使用少数比特描述不同的计算或者或许使用弦方法逼近核．这里，我们利用信号的变换特征以减少算法的计算总量．小波变换将许多类信号的能量集中到少数小波系数上，这可以用于改善离散傅里叶变换[GB96a，GB97c，Guo97，GB97a]和卷积[GB96b]的效率．

10.2.1 导引

离散傅里叶变换可能是信号处理中最重要的计算工具．根据基函数的特征，离散傅里叶变换有很大的改善算法效率的能力[BP85]．经典的 Cooley-Tukey 快速傅里叶变换算法的复杂度为 $O(N\log_2 N)$．因此，傅里叶变换及其快速算法——快速傅里叶变换，在包括信号处理和数值分析的许多领域中广泛地使用．任何加速快速傅里叶变换的方法都是深受期待的． 197

虽然快速傅里叶变换已经被广泛地研究，但是在经典的快速傅里叶变换中，仍然有一些想要的性质没有提供．下面是快速傅里叶变换算法的一些缺点：

1．修剪是不容易的．

当输入点数或输出点数比离散小波变换的长度小时，经常使用一个特殊的称为修剪(pruning)[SB93]的技巧．然而，这通常要求非零的输入数据组合在一起．当少数非零输入随机地设置时，经典的快速傅里叶变换修剪算法不起作用．换句话说，一个稀疏的信号未必有更快速的算法．

2．没有速度与精确度的权衡问题．

一般来说，如果可以在速度方面极大提高，将允许有一些误差．然而，这在经典的快速傅里叶变换算法中是不容易的．主要的原因之一是蝶式运算中的旋转因子是单位模的复数．所以，快速傅里叶变换结构的所有部分都是同等重要的．当容许误差并且速度非常关键时，很难确定快速傅里叶变换结构的哪部分可以忽略．换句话说，快速傅里叶变换是一种单一的速度和单一的精确度的算法．

3．没有内部的噪声减少能力．

许多现实世界的信号都是有噪声的．人们实际感兴趣的是没有噪声的信号的离散傅里

叶变换．经典的快速傅里叶变换算法没有内部的噪声减少能力．即使使用了其他的去噪算法，在去噪的信号上快速傅里叶变换仍然需要同样的计算复杂性．由于上面叙述的缺点，已去噪的信号并不易于加快快速傅里叶变换．

10.2.2 离散傅里叶变换和快速傅里叶变换回顾

对于一个长度 N 的复数据序列，离散傅里叶变换定义为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}, \quad k = 0,\cdots,N-1, \tag{10.1}$$

其中我们使用 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$. 有多种方法来获得不同的快速傅里叶变换算法，可以使用指标映射[BP85]、矩阵因子分解或者多项式因子分解．本章中，我们只考虑矩阵因子分解方法，并且只讨论所谓快速傅里叶变换的以 2 为基数的按时间抽取(decimation in time，DIT)变形．

这里不再重复快速傅里叶变换算法的导出，我们用块图和矩阵因子分解来洞察其基本思想．长度为 8 的以 2 为基数的 DIT 快速傅里叶变换的最后阶段的块图如图 10-2 所示．首先，输入数据分为偶数组和奇数组．然后，每个组作长度为 4 的离散傅里叶变换块．最后，利用蝶式运算(butterfly operation)将比较短的离散傅里叶变换结合到比较长的离散傅里叶变换．

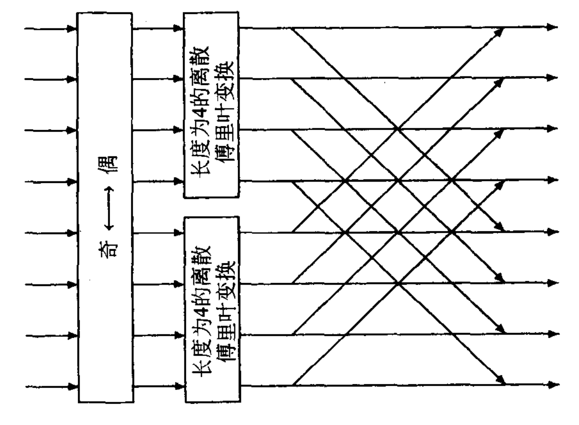


图 10-2 长度为 8 的以 2 为基数的 DIT 快速傅里叶变换的最后阶段

蝶式运算的细节表示在图 10-3 中，其中 $W_n^i = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi i/N}$ 称为旋转因子(twiddle factor)．所有旋转因子都是单位圆上模为 1 的元素．这是经典的快速傅里叶变换精确调整而不增加复杂性的主要原因．假定一些旋转因子大小很小，那么蝶式运算相应的分支可以去掉(修剪)以减少复杂性，而这极小化了引入的误差．当然，误差还与数据乘旋转因子的值有关．当数据的值未知时，最好的方法是切断具有最小旋转因子的分支．

W_N^i −1

图 10-3 以 2 为基数的 DIT 快速傅里叶变换中的蝶式运算

快速傅里叶变换算法的计算复杂性很容易求出．如果令 $C_{\mathrm{FFT}}(N)$ 是长度为 N 的快速傅里叶变换的复杂性，那么可以证明

$$C_{\mathrm{FFT}}(N) = O(N) + 2C_{\mathrm{FFT}}(N/2), \tag{10.2}$$

其中 $O(N)$ 表示线性复杂性．方程(10.2)的解是众所周知的：

$$C_{\mathrm{FFT}}(N) = O(N\log_2 N). \tag{10.3}$$

这是经典的情形，其中分而治之(divide and conquer)方法给出了有效的解．

198~199

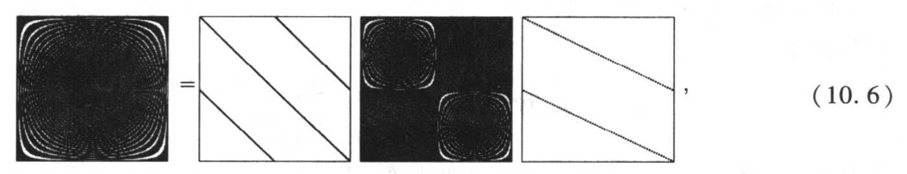
矩阵的观点有助于我们的理解．设 $\boldsymbol{F}_N$ 是 $N\times N$ 离散傅里叶变换矩阵，即 $\boldsymbol{F}_N(m,\ n)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/N}$，其中 $m,\ n\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\}$．设 $\boldsymbol{S}_N$ 是 $N\times N$ 奇偶分离矩阵，例如，

$$\boldsymbol{S}_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}. \tag{10.4}$$

显然 $\boldsymbol{S}_N'\boldsymbol{S}_N=\boldsymbol{I}_N$，其中 $\boldsymbol{I}_N$ 是 $N\times N$ 恒等矩阵．那么按时间抽取(DIT)快速傅里叶变换基于下述矩阵因式分解：

$$\boldsymbol{F}_N=\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{S}_N'\boldsymbol{S}_N=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{N/2}&\boldsymbol{T}_{N/2}\\\boldsymbol{I}_{N/2}&-\boldsymbol{T}_{N/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{N/2}&0\\0&\boldsymbol{F}_{N/2}\end{bmatrix}\boldsymbol{S}_N, \tag{10.5}$$

其中 $\boldsymbol{T}_{N/2}$ 是对角线元素为 $W_N^i(i\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ N/2-1\})$ 的对角矩阵．将上述因式分解用图形表示为



(10.6)

其中我们图示了离散傅里叶变换的实部，以及蝶式运算和奇偶分离的矩阵的量值(大小)．这里，N 取 128.

10.2.3 离散小波变换回顾

本节简短地回顾离散小波变换的基础知识，并且为下面的章节引入必需的记号．离散小波变换的细节已经在其他章节中讨论过了．

离散小波变换的核心是一对滤波器 $\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{g}$——分别是低通滤波器与高通滤波器．它们一定满足一组约束(5.1)[VK95, SN96, Vai92]．离散小波变换的块图如图 10-4 所示．输入数据首先由 $\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 滤波，然后下抽样．同样的建筑块在低通输出上进一步迭代．

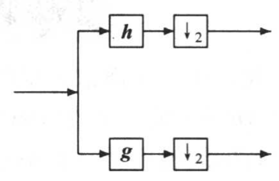


图 10-4　离散小波变换的建筑块

200

离散小波变换算法的计算复杂性也很容易求出．令 $C_{\mathrm{DWT}}(N)$ 是长度为 N 的离散小波变换的复杂性．因为在每个尺度之后，我们只进一步运算一半的输出数据，所以可以证明

$$C_{\mathrm{DWT}}(N)=O(N)+C_{\mathrm{DWT}}(N/2), \tag{10.7}$$

这得到解

$$C_{\mathrm{DWT}}(N)=O(N). \tag{10.8}$$

图 10-4 的运算还可以由 $\boldsymbol{W}_N$ 矩阵形式表示，例如，对于哈尔小波，

$$W_4^{\text{Haar}} = \sqrt{2}/2\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \tag{10.9}$$

$\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 上的正交性条件保证 $\boldsymbol{W}'_N\boldsymbol{W}_N=\boldsymbol{I}_N$. 对于多尺度离散小波变换，其矩阵由不同 N 的 $\boldsymbol{W}_N$ 构成，例如，对于 3 尺度离散小波变换，

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{N/4} & \\ & \boldsymbol{I}_{N/4}\end{bmatrix} & \\ & \boldsymbol{I}_{N/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{N/2} & \\ & \boldsymbol{I}_{N/2}\end{bmatrix}\boldsymbol{W}_N. \tag{10.10}$$

我们可以进一步在一些高通输出上迭代建筑块. 这个推广称为小波包[CW92].

10.2.4 算法的发展

快速傅里叶变换的关键是将 $\boldsymbol{F}_N$ 因式分解为若干个稀疏矩阵，并且稀疏矩阵之一表示一半长度的两个离散傅里叶变换. 用类似于 DIT 快速傅里叶变换的方法，可以得到下述矩阵因式分解：

$$\boldsymbol{F}_N=\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{W}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_N=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{N/2} & \boldsymbol{B}_{N/2}\\ \boldsymbol{C}_{N/2} & \boldsymbol{D}_{N/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{N/2} & 0\\ 0 & \boldsymbol{F}_{N/2}\end{bmatrix}\boldsymbol{W}_N, \tag{10.11}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{N/2}$, $\boldsymbol{B}_{N/2}$, $\boldsymbol{C}_{N/2}$和 $\boldsymbol{D}_{N/2}$都是对角矩阵. $\boldsymbol{A}_{N/2}$与 $\boldsymbol{C}_{N/2}$对角线上的值是 $\boldsymbol{h}$ 的长度为 N 的离散傅里叶变换(即频率响应), $\boldsymbol{B}_{N/2}$与 $\boldsymbol{D}_{N/2}$对角线上的值是 $\boldsymbol{g}$ 的长度为 N 的离散傅里叶变换. 将上述因式分解用图形表示为

= , (10.12)

其中我们图示了离散傅里叶变换的实部以及蝶式运算的矩阵的量值(大小)和使用长度为 16 的 Daubechies 小波[Dau88a, Dau92]的尺度为 1 的离散小波变换. 显然，我们可以看到，新的旋转因子具有不是 1 的模.

201

上述因式分解给出了一种基于离散小波变换的快速傅里叶变换算法. 长度为 8 的算法的最后阶段的块图如图 10-5 所示. 将这种方法重复地应用于较短长度的离散傅里叶变换，以得到完整的基于离散小波变换的快速傅里叶变换算法. 最后的系统等价于一个完全二叉树小波包变换[CW90], 紧接其后的是经典的快速傅里叶变换的蝶式运算，其中新的旋转因子是小波滤波器的频率响应.

蝶式运算的细节在图 10-6 中展示，其中 $i\in\{0, 1, \cdots, N/2-1\}$. 现在，旋转因子是 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的长度为 N 的离散傅里叶变换. 对于良好定义的小波滤波器，它们具有已知的性质. 例如，对于 Daubechies 小波类，它们的频率响应是单调的，并且近一半的值接近零.

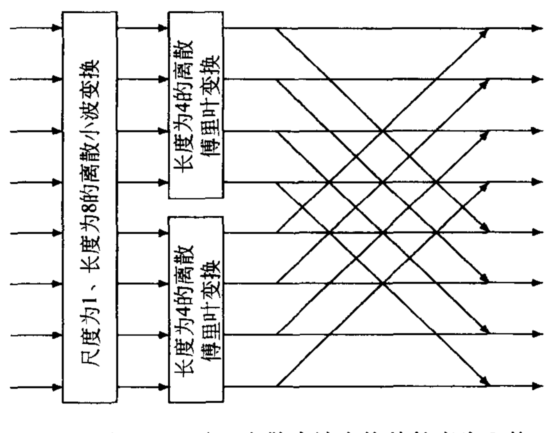


图 10-5　基于离散小波变换的长度为 8 的快速傅里叶变换的最后阶段

$A_{N/2}(i, i)$

$C_{N/2}(i, i)$

$B_{N/2}(i, i)$

$D_{N/2}(i, i)$

图 10-6　以 2 为基数的 DIT 快速傅里叶变换中的蝶式运算

可以利用这个事实实现速度与精确度的权衡．经典的以 2 为基数的 DIT 快速傅里叶变换是上述算法在 $\boldsymbol{h}=[1,\ 0]$和 $\boldsymbol{g}=[0,\ 1]$的特殊情形．虽然它们不满足小波需要的一些条件，但是它们确实组成一个合法的(和平凡的)正交滤波器组，并且在提升的上下文中通常称为惰性(lazy)小波．

202

计算复杂性

对于基于离散傅里叶变换的快速傅里叶变换算法，其计算复杂性与快速傅里叶变换的同阶——$O(N\log_2 N)$，这是因为(10.2)的递推关系再次得到满足．然而，$N\log_2 N$ 前面的常数依赖于使用的小波滤波器．

10.2.5　快速逼近傅里叶变换

快速逼近傅里叶变换(fast approximate Fourier transform，FAFT)的基本想法是修剪(pruning)，即剪掉部分图．传统上，当只是部分输入非零，或者只是需要部分输出时，快速傅里叶变换的部分图(其中或者输入是零，或者输出是不希望的)就被修剪了[SB93]，所以计算复杂性也就降低了．然而，经典的修剪算法有很大的局限性，因为对于大多数应用，输入和输出都是全长的．

基于离散小波变换的快速傅里叶变换算法的结构可以用于推广针对任意信号的经典的修剪思想．从输入数据方面看，信号经小波变换变得稀疏[Mey93，Mey87，Mey90，Dau92]，因此，丢弃不重要的数据，这种逼近可以使算法速度加快．换句话说，虽然输入信号通常不是稀疏的，但是，对于快速傅里叶变换的蝶式运算，离散小波变换产生了稀疏的输入．所以，对于经典的快速傅里叶变换，修剪蝶式运算的任一方法都可以在这里使用．当然，在这里离散小波变换的计算复杂性增加了．在实际实现中，必须仔细地选择使

用的小波，以平衡修剪的好处和变换的代价．显然，最优的选择依赖于我们将遇到的数据类．

从变换方面看，因为新算法的旋转因子有递减的值，所以修剪相应于不重要的旋转因子的部分算法，这种逼近可以使算法速度加快．Daubechies 小波的频率响应如图 10-7 所示．我们可以看到它们是单调递减的．随着长度的增加，越来越多的点接近于零．应当注意，这些滤波器不是为频率响应设计的．它们是为了在 0 和 π 处是扁平的而设计的．各种各样的方法可以用于设计小波和正交滤波器组[Ode96，Sel96，Vai92]以实现更好的频率响应．再强调一次，在较长的滤波器的好的频率响应和使用较长的滤波器所需要的高复杂性之间有一个折衷．

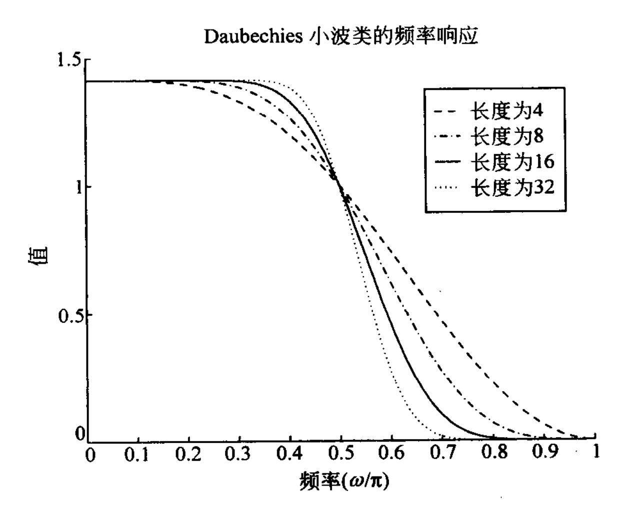


图 10-7　Daubechies 小波类的频率响应

计算复杂性

小波系数大多是稀疏的，所以较短的离散傅里叶变换的输入是稀疏的．如果实现能够根据重要的输入的百分比调整得很好(例如，如果一半的输入是重要的，就使用一半的时间)，那么可以进一步降低复杂性．假定对于 N 个输入，其中 $\alpha N(\alpha\leqslant 1)$ 个是重要的，我们有

$$C_{\mathrm{FAFT}}(N) = O(N) + 2\alpha C_{\mathrm{FAFT}}(N/2). \tag{10.13}$$

例如，如果 $\alpha=\frac{1}{2}$，方程(10.13)简化为

$$C_{\mathrm{FAFT}}(N) = O(N) + C_{\mathrm{FAFT}}(N/2), \tag{10.14}$$

这导致

$$C_{\mathrm{FAFT}}(N) = O(N) \tag{10.15}$$

所以，在上述条件之下，我们得到一个接近快速傅里叶变换的线性复杂性．当然，复杂性

依赖于输入数据、使用的小波、用于丢弃不重要数据的阈值以及修剪蝶式运算使用的阈值．余下的是找一个好的折衷方案．此外，实现将比经典的快速傅里叶变换更复杂．

10.2.6 噪声缩减能力

我们已经证明，对于许多信号类，小波系数的阈值化具有接近最优的噪声缩减性质．在提出的快速逼近傅里叶变换(FAFT)算法的逼近中使用的阈值化方案，恰好是去除数据噪声的硬阈值化方案．软阈值化也能容易地嵌入到快速逼近傅里叶变换中．因此，当做逼近时，提出的算法还减少了噪声．如果我们需要计算噪声信号的离散傅里叶变换，所提出的算法不仅可以减少数值计算的复杂性，而且还能产生比较清楚的结果．

10.2.7 总结

过去，快速傅里叶变换已经用于计算离散小波变换[VK95, SN96, Vai92]，当滤波器是无限脉冲响应(IIR)时，它给出一个有效的算法．本章恰好相反——使用离散小波变换来计算快速傅里叶变换．我们已经证明，当没有去掉中间的系数且没有进行逼近时，利用提出的算法可以计算出精确的结果，并且其计算复杂性与快速傅里叶变换具有同样的阶，即 $O(N\log_2 N)$．算法的优点是双重的．从输入数据方面看，用小波变换得到的信号是稀疏的，因此丢弃不重要的数据，这种逼近可以使算法速度加快．从变换方面看，因为新算法的旋转因子有递减的值，所以修剪相应于不重要的旋转因子的部分算法，这种逼近可以使算法速度加快．由于对于许多信号类，小波是一组无约束基[SN96, Mey90, Dau92]，故算法是很有效的，并且具有内置的去噪能力．另一种方法是由 Shentov、Mitra、Heute 和 Hossen[SMHH95, HHSM95]使用子带滤波器组提出的．

203~204

10.3 具有离散小波变换的非线性滤波或去噪

自从 Daubechies 在 1988 年发表了重要论文[Dau88a]，大多数工程师和科学家就对小波越来越熟知了．事实上，Daubechies[Dau92]、Mallat[Mal89b, Mal89c, MZ93]、Meyer[Mey92b, Mey93]等提出了美好而有意义的结构，但是许多工程师和应用科学家认为他们有了一个“结果去寻找问题”. Donoho 和 Johnstone 近期的工作，再加上 Coifman 和 Beylkin 等人的想法，使这个领域进入到第二个发展阶段——更好地理解为什么小波有效．这种新的理解与非线性过程相结合，不仅解决了目前重要的问题，而且给出了公式化和完全地求解新问题的可能性．一些 Donoho 和 Johnstone 的参考文献是[DJ94b, Don93b, Don95, Don93a, Donar, DLKP95b, DJ95, DJ94a, CD94, Don93c, Don94, CD95a]，且相关的一些文献是[Sai94b, Mou93, TM94b, TM94a, BDGM94]. Coifman 的想法见[CW90, CW92, CM94, CMW92, CMQW92, CD95b, BCR91].

这些方法的基本思想是：取一个信号的离散小波变换，通过阈值化进行这个变换，它去掉了系数的一些值，然后取逆离散小波变换，如在图 10-1 中所描述的．因为小波变换的“集中”能力，所以它们能去除噪声且达到高的压缩比．如果一个信号的能量集中在少

数小波维中，那么它的系数就比任一能量散布在大量系数上的其他信号或者噪声相对要大．这是指，阈值化或者收缩小波变换将去掉小波域中低振幅的噪声或不想要的信号，并且之后逆小波变换将带有一点误差而恢复想要的信号．在传统的基于傅里叶变换的信号处理中，我们处理信号，使得信号和任何噪声在频域中的重叠尽可能得少，并且线性时不变滤波基本上可以分离它们．在信号和噪声的傅里叶谱重叠的地方，不能分离它们．使用线性小波或其他的时间-频率、时间-尺度方法，可以试着选择基系统，使得在这个坐标系统下，信号的重叠尽可能少且可以分离开它们．

新的非线性方法是完全不同的．谱可以像想要的那样重叠．想法是使谱的振幅而不是谱的位置尽可能不同．这允许变换的振幅的修剪、阈值化和收缩，以分离信号或去除噪声．这是小波变换的局部化性质或集中性质，当使用这些非线性方法时这些性质使小波变换特别有效．通常，使得一个系统适合用非线性方法去噪或分离的性质，同样适用于压缩，压缩也是一个非线性过程．

205

10.3.1 用阈值去噪

我们讨论使用 Donoho 公式的阈值化小波变换的基本思想[Don95, DJ94b, LGO*95]．假定具有加性噪声的一个有限长信号形如

$$y_i = x_i + \varepsilon n_i, \quad i = 1,\cdots,N \tag{10.16}$$

它作为一个有限长信号 x_i 的信号观测，即用 i. i. d. 零均值和具有标准差 ε 的白高斯噪声 n_i(即 $n_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$)使信号变坏．目的是由噪声的观测 y 复原信号 x. 这里以及下面，如果指标 i 省掉了，v 就表示具有有序元素 v_i 的一个向量．令 W 是离散小波变换的左可逆小波变换矩阵．那么，方程(10.16)可以在变换域中写为

$$Y = X + N \quad 或 \quad Y_i = X_i + N_i, \tag{10.17}$$

其中大写字母表示变换域中的变量，即 $Y = Wy$. 那么，逆变换矩阵 W^{-1}存在，并且我们有

$$W^{-1}W = I. \tag{10.18}$$

下述表示沿用 Donoho 的方法[DJ94b, Don93b, Don95, Don93a, LGO*95]：假定正交小波变换矩阵 W 为方阵，即 $W^{-1} = W^{\mathrm{T}}$. 本节将使用这一假定．

令$\hat{X}$表示基于观测 Y 的 X 的一个估计．我们考虑对角线性投影

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\cdots,\delta_N), \quad \delta_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\cdots,N, \tag{10.19}$$

这给出估计

$$\hat{x} = W^{-1}\hat{X} = W^{-1}\Delta Y = W^{-1}\Delta W y. \tag{10.20}$$

估计$\hat{X}$是简单地保持或零化各个小波系数得到的．因为我们感兴趣的是 l_2 误差，所以定义风险的测度

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\hat{X},X) &= E[\|\hat{x} - x\|_2^2] = E[\|W^{-1}(\hat{X} - X)\|_2^2] \\ &= E[\|\hat{X} - X\|_2^2].\end{aligned} \tag{10.21}$$

注意到，方程(10.21)中的最后一个等式是 W 的正交性的一个推论．在对角投影方案中，最优系数是 $\delta_i = 1_{X_i > \varepsilon}$，[⊖]即只有当 X 的元素大于 ε 时，相应的 Y 值保持不变，而在其他情形 Y 值置零．这给出理想的风险

$$\mathcal{R}_{\text{id}}(\hat{X},X) = \sum_{n=1}^{N} \min(X^2,\varepsilon^2). \tag{10.22}$$

理想的风险实际上是达不到的，因为它需要未知向量 x 的小波变换 X 的知识．然而，这给出 l_2 误差的一个下限．

206

Donoho 提出下述去噪方案：

1. 计算离散小波变换 $Y = Wy$.

2. 根据硬阈值化．

$$\hat{X} = T_h(Y,t) = \begin{cases} Y, & |Y| \geqslant t \\ 0, & |Y| < t, \end{cases} \tag{10.23}$$

或软阈值化

$$\hat{X} = T_S(Y,t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(Y)(|Y| - t), & |Y| \geqslant t \\ 0, & |Y| < t, \end{cases} \tag{10.24}$$

在小波变换域中实现阈值化．

3. 计算逆离散小波变换 $\hat{x} = W^{-1}\hat{X}$.

这个简单的方案具有几个有意义的性质．对于阈值化方案和适当选择的阈值 $t(N, \varepsilon)$，它的风险在理想风险的一个对数因子($\log N$)的范围内．如果使用软阈值化，那么估计以较高的概率至少像原来函数那样光滑．这个命题的证明依赖于以下事实：小波对于各种光滑函数类是无约束基，以及软阈值化(以高的概率)保证收缩条件 $|\hat{X}_i| < |X_i|$ 成立．收缩条件保证 $\hat{x}$ 与 x 在同一光滑类中．进而，软阈值化估计是满足收缩条件的最优估计．光滑性性质保证估计免于伪振荡，而伪振荡可以是硬阈值化或傅里叶方法的结果．此外，可以证明不可能比在一个因子 $\log N$ 内更接近理想风险．Donoho 方法不仅有好的理论性质，而且在实际中也是很有效的．

此时必须做一些注释．类似于传统的方法(例如，低通滤波)，在噪声的抑制和图像细节的过分光滑之间有一个折衷，虽然是在一个比较小的程度上．还有，硬阈值化借助于 l_2 误差产生比较好的结果．这不足为奇，因为对于实值 x_i，与零均值噪声情况下的一个收缩值相比，观测值 y_i 本身显然是一个更好的估计函数．然而，由硬阈值化得到的估计函数通常呈现不希望的现象——伪振荡，并且没有希望的光滑性质．

10.3.2 平移不变小波变换或非抽取的小波变换

众所周知，离散小波变换不是平移不变的，即在原信号与平移后信号[⊜]的小波系数之

⊖ 注意，允许任意的 $\delta_i \in \mathbf{R}$ 用至多一个因子 2 改善理想的风险[DJ94a].

⊜ 因为我们处理有限长信号，实际是指循环平移．

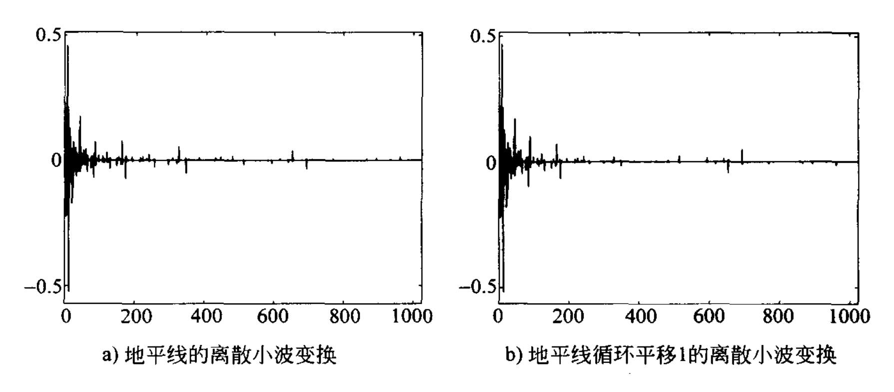
间没有“简单”的关系．本节使用一个非抽取滤波器组或者一种冗余离散小波变换[LGO*95，LGO*96，LGOB95]，讨论平移不变离散小波变换．因为这个系统是冗余的，所以它不是一组基，而是一个框架或紧框架(见7.6节)．令 $X = Wx$ 是 x 的(正交)离散小波变换，S_R 是执行一个循环右平移 R 的矩阵，其中 $R \in \mathbf{Z}$. 那么

$$X_s = Wx_s = WS_Rx = WS_RW^{-1}X, \tag{10.25}$$

这就用正交矩阵 WS_RW^{-1} 在一个信号的两个平移形式 x 和 x_s 的小波变换之间建立了联系．

207

例如，考虑图10-8.



a) 地平线的离散小波变换　　b) 地平线循环平移1的离散小波变换

图10-8　小波变换的平移变化

计算一个平移不变离散小波变换(SIWDT)的最初方法和大多数明显的方法都只是计算所有平移的小波变换．通常，2带小波变换的计算如下：1)分别用一个低通滤波器和一个高通滤波器分别滤波输入信号，2)下抽样每个滤波输出，3)迭代低通输出．由于采用下抽样，所以在滤波器组的每步(相应于离散小波变换越来越粗的尺度)，输出值的数目等于输入值的数目．精确地，必需存储 N 个值．计算复杂性是 $O(N)$．因此，直接计算所有平移的小波变换需要存储 N^2 个元素，并且计算复杂性是 $O(N^2)$.

Beylkin[Bey92]、Shensa[She92]以及Rice小组认为：1)在这些相应于输入信号的所有平移中，只有 $N\log N$ 个不同的系数值，2)可以用计算复杂性 $N\log N$ 来计算．这可由考虑滤波器组的一步看出．令

$$y = [y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]^{\mathrm{T}} = hx, \tag{10.26}$$

其中 y 是分析滤波器组中高通滤波器或者低通滤波器的输出，x 是输入，并且矩阵 h 描述滤波运算．用因子2的 y 的下抽样是指保持偶指标元素，并且丢掉奇指标元素．考虑输入信号平移1的情形．那么，输出信号也平移1，并且具有与前面同样算子的抽样，但是保持偶指标系数而非奇指标系数．因此，要进一步处理的数据点集合是完全不同的．然而，对于输入信号平移2，下抽样输出信号不同于输入信号没有平移的输出信号，这个输出信号只是平移1. 这很容易推广至任一奇数和偶数的平移，并且我们看到，对于任意的平移，

滤波器组第一步的小波系数集只由 $2N$ 个不同的值组成．考虑到只是迭代低通分量（N 个值），我们认识到在 L 步之后恰好得到 LN 个值．使用与在平移变化情形同样的论证，我们可以证明计算复杂性是 $O(N\log N)$．综合滤波器组的推导是类似的．

208

Mallat 为计算连续小波变换的近似提出一种方案[Mal91]，结果是等价于上面描述的方法．认识到这一点并证明的是 Shensa[She92]．进而，Shensa 指出，Mallat 的算法与 à trous 算法的结构相同．在[Mal91]中 Mallat 的目的实际不是得出离散小波变换的平移不变，而是得出连续小波变换的一种近似．

在下面，我们计算平移不变离散小波变换的算法是 Beylkin 算法[㊀]，因为这是我们实现的算法．计算平移不变小波变换的另一个算法[LP94b]基于[Bey92]中提出的方案．它们明确地或暗含地试着求一个最优的、与输入信号有关的平移．因此，变换变成了平移不变的和正交的，但是是信号依赖的，所以是非线性的．可以把 Beylkin 算法直接推广到多维、M 带多分辨分析、小波包．

10.3.3 结合 Shensa-Beylkin-Mallat-à trous 算法和小波去噪

Coifman 指出，将 Donoho 方法应用到观测的若干平移，再利用平均，将产生一个重要的改进[㊁]．这个陈述首先给出下述算法：1）不仅是对输入信号的“一些”循环平移而且是对所有平移应用 Donoho 方法；2）平均调整的输出信号．如同前面已经证明的，所有可能的平移的计算可以使用 Beylkin 算法有效地实现．因此，不使用刚刚描述的算法，我们对于观测数据的平移不变离散小波变换简单地应用阈值化，并且计算逆变换．

在详细叙述之前，先简短地讨论使用传统的正交小波变换和平移不变小波变换之间的不同．显然，使用大于 N 的小波系数，我们引入冗余．一些作者指出，冗余小波变换或框架，在变换域增加白噪声的情形（例如，用量化），增加了数值的健壮性[Dau92]．然而，这不同于我们感兴趣的情况，因为：1）我们由于冗余已经校正噪声，2）我们试着在变换域去除噪声，而不是考虑添加一些噪声的影响[LGO*95，LGO*96]．

10.3.4 性能分析

平移不变离散小波变换的理想风险的分析类似于 Guo[Guo95]．根据

$$A = \{i \mid |X_i| \geq \varepsilon\}, \tag{10.27}$$

$$B = \{i \mid |X_i| < \varepsilon\}, \tag{10.28}$$

和一个理想的对角投影估计或者预测

$$\tilde{X} = \begin{cases} Y_i = X_i + N_i & i \in A \\ 0 & i \in B, \end{cases} \tag{10.29}$$

209

定义集合 A 和 B. 那么，逐点估计误差是

㊀ 然而，应当注意 Mallat 发表他的算法比较早．

㊁ 一个类似的附注可以在[Sai94a]的第 53 页中找到．

$$\tilde{X}_i - X_i = \begin{cases} N_i & i \in A \\ -X_i & i \in B. \end{cases} \quad (10.30)$$

在下面，一个向量或者矩阵用 A(或 B)的指标指示，只有具有 A(或 B)范围外的指标的那些行保持，所有其他行置为零．有了这些定义和(10.21)，对于平移不变离散小波变换的理想风险可以得出

$$\mathcal{R}_{id}(\tilde{X},X) = E[\ \| W^{-1}(\tilde{X} - X) \|_2^2] \quad (10.31)$$

$$= E[\ \| W^{-1}(N_A - X_B) \|_2^2] \quad (10.32)$$

$$= E\left[(N_A - X_B)^T \underbrace{W^{-1T}W^{-1}}_{C_{W^{-1}}} (N_A - X_B) \right] \quad (10.33)$$

$$= E[N_A^T W^{-1T} W^{-1} N_A] - 2X_B^T C_{W^{-1}} E[N_A] + X_B^T C_{W^{-1}} X_B \quad (10.34)$$

$$= \mathrm{tr}[E[W^{-1}N_A N_A^T W^{-1T}]] + X_B^T C_{W^{-1}} X_B \quad (10.35)$$

$$= \mathrm{tr}[W^{-1}E[W_A \varepsilon n \varepsilon n^T W_A^T] W^{-1T}] + X_B^T C_{W^{-1}} X_B \quad (10.36)$$

$$= \varepsilon^2 \mathrm{tr}[W^{-1} W_A W_A^T W^{-1T}] + X_B^T C_{W^{-1}} X_B. \quad (10.37)$$

其中 $\mathrm{tr}(X)$表示 X 的迹．为了推导，我们利用了 $N_A = \varepsilon W_A n$，并且相继地 N_{A_i}具有零均值．注意到，对于正交的 W，方程(10.37)直接地专用于方程(10.22)．方程(10.37)依赖于特定的信号 X_B、变换 W^{-1}和噪声水平 ε.

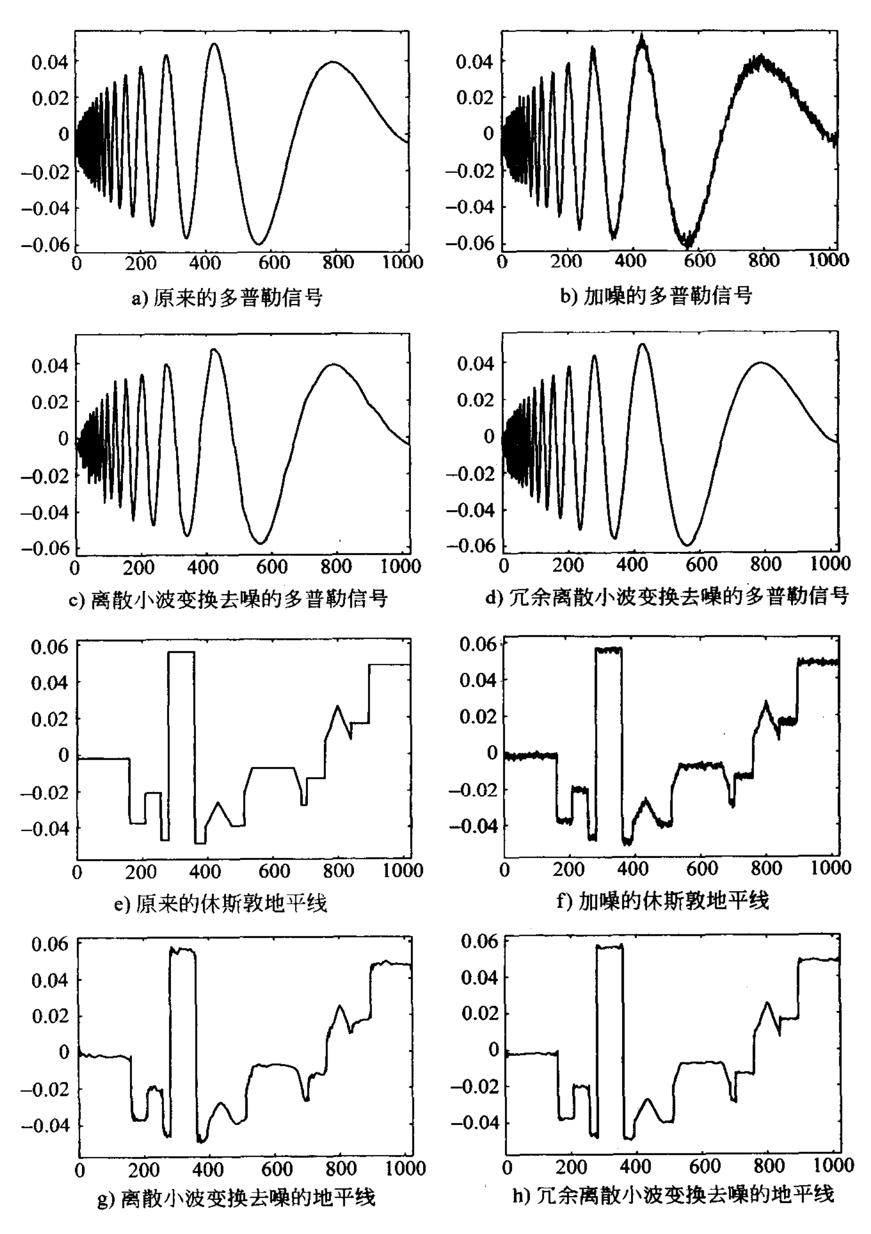
可以证明，当使用上面引入的平移不变离散小波变换和由 Donoho 提出的阈值化方案(包括他对阈值的选择)时，如同正交离散小波变换情形一样，对于实际的风险，存在同样的上界，即理想风险乘一个对数(按 N)因子．我们只简要给出证明．Johnstone 和 Silverman 指出[JS94b]，对于有色噪声，一个明智的选择是 $\delta_i = 1_{X_i \geqslant \varepsilon_i}$，其中 ε_i 是第 i 个分量的标准差．因为 Donoho 方法对所有分量使用一致的阈值化，所以必须指出 $C_{W^{-1}}$(N 个分量的方差)的对角元素是恒等的．这可以通过考虑平移不变离散小波变换的重构方案证明．有了这些陈述，余下的证明可以用 Donoho 和 Johnstone[DJ94b]给出的同样方法完成．

10.3.5 去噪的例子

图 10-9 中给出的两个例子表明基于小波去噪的工作原理．第一个表示鸟叫信号或多普勒信号，这个信号是变频和变振幅的．在 b 中，噪声添加到这个信号中，并且基本的 Donoho 去噪的结果表示在 c 中，而冗余离散小波变换去噪的结果表示在 d 中．首先，注意怎样很好地把噪声去掉并且几乎没有信号的损失．用传统的线性滤波器，这是不可能的．

210

第二个例子是休斯敦地平线，其中冗余离散小波变换的改善更明显．



a) 原来的多普勒信号　b) 加噪的多普勒信号

c) 离散小波变换去噪的多普勒信号　d) 冗余离散小波变换去噪的多普勒信号

e) 原来的休斯敦地平线　f) 加噪的休斯敦地平线

g) 离散小波变换去噪的地平线　h) 冗余离散小波变换去噪的地平线

图 10-9　使用 $\psi_{D8'}$减少噪声的例子

10.4 统计估计

这个问题非常类似于信号恢复问题，一个信号必须从加了白高斯噪声的信号估计．由
211
线性性，加的噪声是在变换域中加入的，这里问题变成：由 $y=\theta+\varepsilon z$ 估计 θ，其中 z 是一个噪声向量(每个分量是零均方差的一个高斯随机变量)并且 $\varepsilon>0$ 是一个标量的噪声水平．用帕塞瓦尔的均方误差度量的性能由

$$R_\varepsilon(\hat{\theta},\theta) = E\|\hat{\theta}(y)-\theta\|_2^2$$

给出．它依赖于信号 θ、估计量$\hat{\theta}$、噪声水平 ε 以及基．

对于一个固定的 ε，最优的极大极小过程是，对于最坏可能的信号，由系数体 Θ 得到最小误差

$$R_\varepsilon^*(\Theta) = \inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta\in\Theta} R_\varepsilon(\hat{\theta},\theta).$$

考虑特定的非线性过程$\hat{\theta}$，它对应每个噪声系数 y_i 的软阈值化(soft-thresholding)：

$$T_\varepsilon(x_i) = \mathrm{sgn}(y_i)(|y_i|-\varepsilon)_+.$$

令 $r_\varepsilon(\theta)$是信号 θ 对应的误差，并且令 $r_\varepsilon^*(\Theta)$是系数体 Θ 最坏情形的误差．

如果系数体是实心的，即在一组特定的基下是正交对称的，那么，误差在这组基下的衰减(渐近地，$\varepsilon\to 0$)至少像在任一其他基下一样快．也就是说，对于任一正交矩阵 U，$r_\varepsilon(\Theta)$趋于零至少像 $r_\varepsilon(U\Theta)$一样快．因此，无约束基接近渐近最优．进而，对于小的 ε，我们可以联系这个过程与任一其他过程如下[Don93b]：

$$R^*(\varepsilon,\Theta) \leqslant r^*(\varepsilon,\Theta) \leqslant O(\log(1/\varepsilon))\cdot R^*(\varepsilon,\Theta), \quad \varepsilon\to 0.$$

10.5 信号和图像压缩

10.5.1 数据压缩基础

由基本的信息论，我们知道描述一个独立同分布的离散随机变量 X 的实现所需的比特的最小平均数目是熵 $H(X)$[CT91]. 如果分布 $p(X)$是已知的，那么可以设计赫夫曼编码或使用算术编码方法达到这个最小化[BCW90]. 否则，需要使用自适应的方法．

连续随机变量需要一个无限数目的比特来描述，所以，对于实际的有限表示，量化总是必需的．然而，量化引入误差．因此，目标是达到最好的比特率-失真率折衷[JN84，CT91，BW94]. 文本压缩[BCW90]、波形编码[JN84]以及子带编码[VK95]已经广泛地研究了许多
212
年．这里，我们研究小波压缩，或者更一般地，变换编码．另外，还讨论低比特率．

10.5.2 原型变换编码器

原型变换编码器的简单三步结构如图 10-10 所示．第一步是信号的变换．对于一个长度为 N 的离散信号 $f(n)$，我们使用一组规范正交基函数将它展开为



图 10-10　原型变换编码器

$$f(n) = \sum_{1}^{N} c_i \psi_i(n), \tag{10.38}$$

其中

$$c_i = \langle f(n), \psi_i(n) \rangle. \tag{10.39}$$

然后，我们使用均匀标量量化器 Q，如图 10-11 所示，这广泛地用于基于小波的图像压缩中[Sha93，SP96a]，

$$\hat{c}_i = Q(c_i). \tag{10.40}$$

将量化步大小表示为 T. 注意，在图中，量化器(数字转换器)具有一个静止的零，所以如果 $|c_i| < T$，那么 $Q(c_i) = 0$. 对于那些不重要的系数定义一个指标集 $\mathcal{I} = \{i: |c_i| < T\}$. 令 M 是值比 T 大的系数(重要系数)的数目. 因此$\mathcal{I}$的大小是 $N - M$. 由量化引起的误差平方是

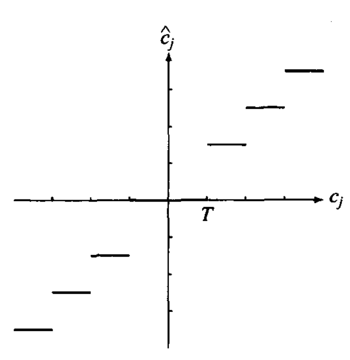


图 10-11　均匀标量量化器

$$\sum_{i=1}^{N} (c_i - \hat{c}_i)^2 = \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i^2 + \sum_{i \notin \mathcal{I}} (c_i - \hat{c}_i)^2. \tag{10.41}$$

因为变换是规范正交的，所以它与重构误差是相同的. 假定 T 足够小，使得重要系数均匀分布在每个量化容器中. 那么，误差表示中的第二项是

$$\sum_{i \notin \mathcal{I}} (c_i - \hat{c}_i)^2 = M \frac{T^2}{12}. \tag{10.42}$$

对于第一项，我们需要下述标准的逼近定理[DL93]，其中涉及了系数的 l_p 范数

$$\| f \|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |c_i|^p \right)^{1/p} \tag{10.43}$$

定理 56　令 $\lambda = \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$，那么

$$\sum_{i \notin \mathcal{I}} c_i^2 \leqslant \frac{\| f \|_p^2}{2\lambda - 1} M^{1-2\lambda}. \tag{10.44}$$

如果 $\| f \|_p^2 < +\infty$，这个定理可以推广到无限维空间. 已经证明了，对于一个 Besov 空间中的函数，$\| f \|_p^2 < +\infty$ 不依赖于小波的特定选择，只要基中的每个小波有 $q > \lambda - \frac{1}{2}$ 阶的消失矩，并且是 q 次连续可微的[Mey92b]. Besov 空间包括逐段正则的函数，可以包括不连续性. 这个定理指出，当重要系数的数目增加时，误差表示的第一项很快地减少.

原型压缩算法的比特率还可以分为两部分．对于第一部分，需要指出是否系数是重要的，还要知道重要性图．例如，对于重要的系数可以使用1，对于不重要的系数可以使用0. 我们总共需要 N 个这样的指示．对于第二部分，需要表示重要系数的值．我们只需要 M 个值．因为值和指示的分布一般不是已知的，所以通常使用自适应熵编码．

对于低比特率变换编码，能量集中是最重要的性质之一．假定对于抽样量化步大小 T，我们有产生较少重要系数的第二组基．重要图指示的分布更偏，因此需要较少的比特编码．此外，我们要求对较少数目的重要系数编码，因此可以需要较少的比特．在平均时间情形，如同方程(10.42)中所示，一个比较小的 M 会减少第二项的误差．总的来说，一组新基非常有可能会改善比率失真性能．对于带有不连续性的信号，小波有比傅里叶变换更好的能量集中性质．这是基于小波的压缩方法通常不用来实现基于 DCT 的 JPEG 的主要原因之一，特别是在低比特率下．

213 ~ 214

10.5.3 基于小波的压缩算法的改进

上述的原型算法是由[MF97，Guo97]提出的，但是可以进一步改善它的各种建筑块[GB97b]. 正如由图10-12中看到的，重要图仍然有相当多可以利用的结构．修改和改进使用下述思想：

- 不重要系数通常聚集在一起．特别地，它们通常聚集在若干尺度的同样位置．因为对于每个尺度，邻近的系数之间的距离加倍，不重要系数通常形成一个树形，如图10-12中所示．可以利用这些零树[Sha93，SP96a]达到极好的结果．

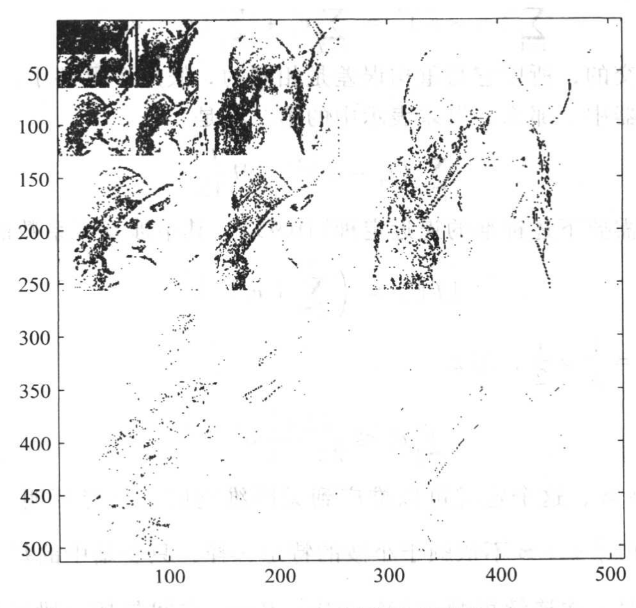


图10-12 Lenna 图像的重要图

- 基的选择是很重要的．方法已经发展到对于信号自适应地选择基[RV93, XHRO95]．虽然它们的计算上是很细致的，但是可以实现实质的改进．
- 特殊的运行长度编码可以用于重要系数图和值的编码[TW96, TVC96]. 215
- 改进的量化方法可以用于替代简单的标量量化器[JCF95].
- 基于统计分析的方法，像分类、模型、估计以及预测，也产生令人印象深刻的结果．
- 我们可以通过使用越来越小的步的大小，而不是使用一个固定的量化步大小，逐步地加细量化．这些嵌入的方案允许编码器和解码器在任一个比特率上停止[Sha93, SP96a].
- 小波变换可以用整数到整数的小波变换代替，量化是不必要的，并且压缩是没有损失的[SP96a].

其他的参考文献是[Don95, DJ94b, Don93b, Sai94b, GOL* 94b, Sha93, SC95, SC96, Sha93, VBL95, SP96a, SP96b, BW94, Guo97].

10.6 小波为什么如此有用

小波分析中的基小波可以选择得是光滑的，其中光滑性以不同的方法度量[Mey87]．为了表示 K 阶可导的 $f(t)$，可以选择小波 $\psi(t)$ 是 K(或更高)阶连续可微的，对于在此意义下强加更高的光滑性，代价是基函数的支撑、滤波器长度以及计算复杂性都增加了．此外，光滑小波基还是表示具有任意多个奇异性信号的“最好基”[Don93b]，这是值得注意的特性．

小波在表示这些类或另一些函数类中的有用性来源于下述事实：对于这些空间的大多数，小波基是一组无约束基，这是一个接近最优的性质．

为完成这一讨论，我们必须激发无约束基对于特定问题(例如数据压缩)是渐近最优的性质[Don93b]．图 10-13 暗示，为什么可以期望这样的基，其中系数是实心体，并且像希望的那样是正交对称的．信号类定义在用直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 限定的矩形内．对于图中展示的两组基，相应于点 A 的信号是最坏情况的信号，残差($n=1$)由 $a\sin(\theta)+b\cos(\theta)$ ($\theta\in\{0, \alpha\}$)给出，并且 $\theta=0$ 时它是最小的，这表明应优先选用正交对称基．这个结果实际上是 $a\neq b$ 时的一个结论(这是为什么使用变换编码的一种典型情形——如果 $a=b$，结果是对于 $n=1$，具有 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 的“对角”基是最优的)．系数体越接近于实心体和具有变化边长的正交对称体，各个系数的相关性就越低，并且在此基下压缩比就越高．

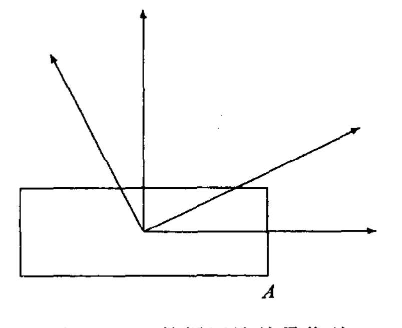


图 10-13 数据压缩的最优基

总之，小波基具有许多有用的性质：

1. 它们可以表示光滑函数.
2. 它们可以表示奇异性.
3. 基函数是局部的. 这使得大多数基于系数的算法自然地适应于不同类型的函数.
4. 对于各种函数类，它们具有无约束基(或在一种极小极大意义下接近最优)的性质，这是指，如果我们关于信号了解很少，那么小波基通常是一种适当的选择.
5. 它们在计算上的代价是不大的——或许少数实际使用的线性变换具有的复杂性是 $O(N)$，而傅里叶变换的复杂性是 $O(N\log(N))$，或者一个任意的线性变换的复杂性是 $O(N^2)$.
6. 非线性软阈值化对于统计估计是接近最优的.
7. 非线性软阈值化对于信号复原是接近最优的.
8. 系数向量截断对于数据压缩是接近最优的.

10.7 应　　用

下面列举小波方法在若干领域中的成功应用.

10.7.1 偏微分方程数值解

对于偏微分方程的离散化，使用小波作为基函数已经取得了显著的成功. 它们似乎给出了具有一些多网格方法特征的有限元方法的一种推广. 看来是小波展开的局部化能力为方法提供了稀疏算子和好的数值稳定能力[GLRT90，RBSB94，RW97，BCR91，Bey94，HPW94，BCR92，LPT92，BK97，BKV93].

10.7.2 地震和地球物理信号处理

216 ≀ 217

基于小波信号处理的应用领域之一是地震和地球物理信号处理. 去噪、压缩以及检测的应用在这里都是重要的，特别是高维的信号和图像. 一些参考文献是[RD86，OY87，Sca94，FK94，Sai94b，LM89，GGT89，GB96c][GGM84b，GGM84a，DDO97，Bey97].

10.7.3 医学和生物信号与图像处理

基于小波信号处理的另一个应用领域是医学和生物信号与图像处理. 去噪、压缩以及检测的应用在这里仍都是重要的，特别是高维的信号和图像. 一些参考文献是[AU96，Tur86，IRP*96].

10.7.4 通信中的应用

小波方法对于通信问题的一些应用在[TM94b，LKC*94，Lin95，WWJ95，SL96]中讨论.

10.7.5 分形

基于小波的信号处理已经与分形结合了，并且系统是混沌的[FHV94，Mas94，

Wor96, DL92, AAEG89, Aus89, WO92a, WO92b]. 小波的多分辨阐述和某些分形的自相似特征使小波成为这种分析的一种自然的工具. 从音乐中消除噪声的一种应用在[BCG94]中给出.

其他的应用包括自动目标识别(ATR)问题等.

10.8 小波软件

有许多软件包适用于研究、试验以及应用小波信号分析. 在本书的末尾有许多MATLAB程序. MathWorks公司有一个小波工具箱(Wavelet Toolbox)[MMOP96]; 斯坦福大学的Donoho研究小组有WaveTool; 耶鲁大学的研究小组有XWPL和WPLab [Wic95]; 斯坦福大学的Taswell有WavBox[Tas96], 西班牙的一个研究小组有Uvi-Wave; MathSoft公司有S+WAVELETS; Aware公司有WaveTool; 莱斯大学的DSP研究小组有一个MATLAB小波工具箱(网址 http:www-dsp. rice. edu). 在[BDG96]中有若干小波软件包的很好描述和列表. 在本书的附录C中有一些MATLAB程序. 它们用于建立本书的各种例子和图形, 在学习特殊主题的理论时可参考阅读. 218

第11章 一些总结

本章给出本书结果的简洁的总结，说明基本概念怎样围绕着2带小波分析发展，并且离散小波变换推广到一个很丰富的系统的集合，而选择可能变得有些令人迷惑.

11.1 基本的多分辨尺度函数的性质

首先以4个表给出总结，这些表是在第5章叙述的重数 $M=2$ 或2带多分辨系统的尺度函数 $\varphi(t)$、尺度系数 $h(n)$ 和它们的傅里叶变换 $\Phi(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 的基本关系与基本方程. 各种假定与条件省略了，为的是看到“全局”，并且看到增加约束的效果.

不同的“情形”对于叙述的关系表示有点类似的条件. 例如，在情形1中，表1给出多分辨条件在时间和频率域中叙述，而在表2中，相应的必要条件对于在 L^1 中的尺度函数给出. 然而，条件不是充分的，除非一般的分布是允许的. 在情形1中，表3给出张成适当的多分辨信号空间的小波的定义，但似乎不适合对于在表4中的情形1. 显然，这些表的编制有点主观.

如果再增加一个线性条件“拉紧”限制，那么我们得到情形2，它们相继在表1、表2、表4中，但是没有保证比较好的一个分布. 情形3包含经过伸缩和平移的正交性，所以，对于情形3，在表中包含小波的有两行. 情形4在频率响应 $H(\omega)$ 上或者在转移矩阵的特征值上添加到正交性一个条件，这些条件对于情形3保证一组 L^2 基而不是一个紧框架. 情形5和情形6涉及零矩和尺度函数光滑性与对称性.

在一些情形中，第3列与第4列是等价的，而其他列不是等价的. 在一些种类中，一个比较高的编号假定一个比低的编号的情形，而其他不做假定. 这些表试着给出一种结构而没有细节. 当阅读前面的章节时参考它们是有用的，并且参考前面的章节也可看到在这些表背后的假定和条件.

表 11-1 $M=2$ 尺度函数(SF)的性质和它们的傅里叶变换

情形	条件	$\varphi(t)$	$\Phi(\omega)$	信号空间
1	多分辨	$\varphi(t)=\sum h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)$	$\Phi(\omega)=\prod \frac{1}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$	分布
2	单位分解	$\sum \varphi(t-n)=1$	$\Phi(2\pi k)=\delta(k)$	分布
3	正交	$\int\varphi(t)\varphi(t-k)\mathrm{d}t=\delta(k)$	$\sum \lvert\Phi(\omega+2\pi k)\rvert^2=1$	L^2
5	尺度函数光滑性	$\frac{\mathrm{d}^{(\ell)}\varphi}{\mathrm{d}t}<\infty$		多项式 $\in \mathcal{V}_j$
6	尺度函数矩	$\int t^k\varphi(t)\mathrm{d}t=0$		Coiflet

表 11-2 $M=2$ 尺度系数的性质和它们的傅里叶变换

情形	条件	$h(n)$	$H(\omega)$	特征值$\{T\}$
1	存在	$\sum h(n)=\sqrt{2}$	$H(0)=\sqrt{2}$	
2	基本的	$\sum h(2n)=\sum h(2n+1)$	$H(\pi)=0$	特征值 $=1$
3	正交镜像滤波器	$\sum h(n)h(n-2k)=\delta(k)$	$\lvert H(\omega)\rvert^2+\lvert H(\omega+\pi)\rvert^2=2$	特征值 $\leqslant 1$
4	正交 L^2 基	$\sum h(n)h(n-2k)=\delta(k)$	$\lvert H(\omega)\rvert^2+\lvert H(\omega+\pi)\rvert^2=2$ and $H(\omega)\neq 0, \lvert\omega\rvert\leqslant\pi/3$	一个特征值 $=1$，另外 <1
6	Coiflet	$\sum n^k h(n)=0$		

表 11-3 $M=2$ 小波的性质和它们的傅里叶变换

情形	条件	$\Psi(t)$	$\Psi(\omega)$	信号空间
1	多分辨分析	$\Psi(t)=\sum h_1(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)$	$\Psi(\omega)=\Pi\frac{1}{\sqrt{2}}H_1\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$	分布
3	正交	$\int\varphi(t)\psi(t-k)\mathrm{d}t=0$		L^2
3	正交	$\int\psi(t)\psi(t-k)\mathrm{d}t=\delta(k)$		L^2
5	小波矩	$\int t^k\psi(t)\mathrm{d}t=0$		多项式不 $\in\mathcal{W}_j$

表 11-4 $M=2$ 小波系数的性质和它们的傅里叶变换

情形	条件	$h_1(n)$	$H_1(\omega)$	特征值$\{T\}$
2	基本的	$\sum h_1(n)=0$	$H_1(0)=0$	
3	正交	$h_1(n)=(-1)^n h(1-n)$	$\lvert H_1(\omega)\rvert=\lvert H(\omega+\pi)\rvert$	
3	正交	$\sum h_1(n)h_1(2m-n)=\delta(m)$	$\lvert H_1(\omega)\rvert^2+\lvert H(\omega)\rvert^2=2$	
5	光滑性	$\sum n^k h_1(n)=0$	$H(\omega)=(\omega-\pi)^k\tilde{H}(\omega)$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$

219 ~ 220

11.2 小波系统的类型

这里，我们试图借助于基本的 $M=2$ 系统的修改和推广，给出各类小波系统的结构清单．有一些类在这里没有包括，因为整个的目的仍然是日常产生新结果的实际的研究领域．然而，这些列表加上目录、索引以及参考文献将帮助读者走出迷宫．对于每个题目，相关的章或节在括号中给出．

- 信号展开（1）
  ——广义的展开系统（7.6）
  ——多分辨系统（2）
- 多分辨小波系统（2）
  ——$M=2$ 或 2 带小波系统（2～6）
  ——$M>2$ 或 M 带小波系统（7.2）
  ——小波包系统（7.3）
  ——多小波系统（7.5）
- 尺度函数滤波器的长度（5）
  ——紧支撑小波系统
  ——无限支撑小波系统
- 正交性（5）
  ——正交小波基或规范正交小波基
  ——半正交系统
  ——双正交系统（7.4）
- 对称性
  ——对称尺度函数和对称小波（7.4，7.5）
  ——近似对称系统（6.9）
  ——最小相位谱因子化系统（6）
  ——广义尺度函数
- 完全的和超完全系统（4，7.6）
  ——框架
  ——紧框架
  ——冗余系统和冗余变换（7.6，10.3）
  221
  ——自适应系统和变换，追踪方法（7.6）
- 离散与连续信号和变换{类似傅里叶方法}（7.8）
  ——离散小波变换{傅里叶级数}（1）
  ——离散时间小波变换{离散傅里叶变换}（3.8）
  ——连续时间小波变换{傅里叶变换或傅里叶积分}（7.8）
- 小波设计（6）
  ——极大零小波矩 [Daubechies]
  ——极大零尺度函数矩
  ——尺度函数与小波极大混合零矩 [Coifman]（6.9）
  ——极大光滑的尺度函数或小波 [Heller、Lang 等]
  ——极小尺度变差 [Gopinath、Odegard 等]

——频域准则

- 巴特伍兹（Daubechies）
- 最小二乘，约束最小二乘，切比雪夫

  ——M 带系统的余弦调制（8.5）
- 说明（2）

  ——信号本身

  ——离散小波变换（展开系数）

  ——在各种尺度或平移上的时间函数

  ——时频（时间-尺度）平面的花砖（7.1）

222

附录A 对第5章关于尺度函数的推导

本附录包括在第5章中给出的定理和公式的概略证明和导出. 它们不企图是完备或有系统的阐述，但是它们足以了解为什么这个结果是真的背后的想法，并且给出一些深入理解它们的解释，以及指出假定与限制.

证明1 用(5.10)和(7.7)给出的条件，可以由

$$\varphi(x) = \sum_n h(n)\sqrt{M}\varphi(Mx-n) \tag{A.1}$$

两边的积分导出

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_n h(n)\int\sqrt{M}\varphi(Mx-n)\mathrm{d}x \tag{A.2}$$

作变量替换 $y=Mx$ 并且注意积分与平移无关，这给出

$$= \sum_n h(n)\sqrt{M}\int\varphi(y)\frac{1}{M}\mathrm{d}y. \tag{A.3}$$

由于除了 $\varphi\in L^1$ 外没有进一步要求,允许求和与积分交换顺序,并且 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x\neq 0$,这给出(7.7)为

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M} \tag{A.4}$$

并且对于 $M=2$ 给出(5.10). 注意，这没有假定正交性，也没有假定任何 $\varphi(t)$ 的规范化，甚至没有假定 M 是一个整数.

这是 $\varphi(t)$ 存在的最基本的必要条件，并且它有最少的假定与限制.

证明2 在(5.14)和(7.8)中的条件，是由在(5.13)中用

$$\int\varphi(x)\varphi(x-m)\mathrm{d}x = E\delta(m) \tag{A.5}$$

给出的尺度函数平移的正交性得到的系数用 M 平移下抽样的正交性. 基本的尺度方程(A.1)代入在(A.5)中两个函数给出

$$\int\left[\sum_n h(n)\sqrt{M}\varphi(Mx-n)\right]\left[\sum_k h(k)\sqrt{M}\varphi(Mx-Mm-k)\right]\mathrm{d}x = E\delta(m), \tag{A.6}$$

在交换顺序和变量替换 $y=Mx$ 之后，给出

$$\sum_n\sum_k h(n)h(k)\int\varphi(y-n)\varphi(y-Mm-k)\mathrm{d}y = E\delta(m). \tag{A.7}$$

使用在(A.5)中的正交性，给出在(5.14)和(7.8)中我们需要的结果

$$\sum_n h(n)h(n-Mm) = \delta(m). \tag{A.8}$$

这个结果需要正交性条件(A.5)，M 必须是整数，并且可以使用任一非零的规范化因子 E.

证明3(推论2) 在(5.17)中的结果

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = 1/\sqrt{2}, \tag{A.9}$$

或更一般的结果

$$\sum_n h(Mn) = \sum_n h(Mn+k) = 1/\sqrt{M}, \tag{A.10}$$

由对于 $M=2$，分开(A.4)为奇系数与偶系数的和得到.

$$\sum_n h(n) = \sum_k h(2k) + \sum_k h(2k+1) = K_0 + K_1 = \sqrt{2}. \tag{A.11}$$

下面，我们使用(A.8)，并且在 n 上求和给出

$$\sum_n \sum_k h(k+2n)h(k) = 1, \tag{A.12}$$

然后，我们分为奇系数与偶系数的和，并且交换次序给出

$$\begin{aligned}&\sum_n \left[\sum_k h(2k+2n)h(2k) + \sum_k h(2k+1+2n)h(2k+1)\right]\\ &= \sum_k \left[\sum_n h(2k+2n)\right]h(2k) + \sum_k \left[\sum_n h(2k+1+2n)\right]h(2k+1)\\ &= \sum_k K_0 h(2k) + \sum_k K_1 h(2k+1) = K_0^2 + K_1^2 = 1.\end{aligned} \tag{A.13}$$

联立解(A.11)与(A.13)给出 $K_0 = K_1 = 1/\sqrt{2}$，并且得到结果(5.17)或对于 $M=2$ 的(A.9).

如果由(7.7)和(7.8)对 $M=3$ 使用同样的方法，我们有

$$\sum_n x(n) = \sum_n x(3n) + \sum_n x(3n+1) + \sum_n x(3n+2) = \sqrt{3}, \tag{A.14}$$

借助于部分和 K_i，这是

$$\sum_n x(n) = K_0 + K_1 + K_2 = \sqrt{3}. \tag{A.15}$$

像在(A.12)与(A.13)中做的那样，使用正交性条件(A.8)给出

$$K_0^2 + K_1^2 + K_2^2 = 1. \tag{A.16}$$

方程(A.15)与(A.16)同时成立当且仅当 $K_0 = K_1 = K_2 = 1/\sqrt{3}$. 这个过程对于任一整数 M 和任一非零规范化因子有效.

证明4 如果 $\varphi(x)$ 的支撑是[0, $N-1$]，假定 $h(n)$ 的支撑为[N_1, N_2]，由基本的递推方程，我们有

$$\varphi(x) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h(n)\sqrt{2}\varphi(2x-n), \tag{A.17}$$

其中(A.17)右边的支撑是[$N_1/2$, $(N-1+N_2)/2$). 因为(A.17)两边的支撑必须是相同的，在和上限制，或限制 $h(n)$ 非零指标使得 $N_1=0$ 和 $N_2=N$，所以 $h(n)$ 的支撑是[0, $N-1$].

证明 5 首先定义自相关函数

$$a(t) = \int \varphi(x)\varphi(x-t)\mathrm{d}x, \tag{A.18}$$

和功率谱

$$A(\omega) = \int a(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \iint \varphi(x)\varphi(x-t)\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t. \tag{A.19}$$

在变量替换 $y=x-t$ 之后，交换运算的顺序给出

$$A(\omega) = \int \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x \int \varphi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega y}\mathrm{d}y \tag{A.20}$$

$$= \Phi(\omega)\Phi(-\omega) = |\Phi(\omega)|^2. \tag{A.21}$$

如果把(A.18)看作是(A.21)的逆傅里叶变换，并且在 $t=k$ 抽样 $a(t)$，则有

$$a(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega)|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\mathrm{d}\omega \tag{A.22}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell}\int_0^{2\pi} |\Phi(\omega+2\pi\ell)|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\ell} |\Phi(\omega+2\pi\ell)|^2\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\mathrm{d}\omega, \tag{A.23}$$

但是这个积分是逆离散时间傅里叶变换的形式，这意思是

$$\sum a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k} = \sum_{\ell} |\Phi(\omega+2\pi\ell)|^2. \tag{A.24}$$

如果 $\varphi(t)$ 的整数平移是正交的，$a(k)=\delta(k)$，则有

$$\sum_{\ell} |\Phi(\omega+2\pi\ell)|^2 = 1. \tag{A.25}$$

如果尺度函数不是规范化的

$$\sum_{\ell} |\Phi(\omega+2\pi\ell)|^2 = \int |\varphi(t)|^2\mathrm{d}t, \tag{A.26}$$

这类似于使在频域的能量与在时域的能量有关系的帕塞瓦尔定理.

证明 6 方程(5.20)指出具有尺度系数作为滤波器系数的一个有限脉冲响应滤波器的频率响应的一个很有趣的性质. 这个结果可以在频域或时域导出. 我们给出频域的论证. 尺度方程(A.1)在频域变成了(5.51). 在尺度方程变型

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(\omega/2)\Phi(\omega/2) \tag{A.27}$$

的两边取平方模给出

$$|\Phi(2\omega)|^2 = \frac{1}{2}|H(\omega)|^2|\Phi(\omega)|^2, \tag{A.28}$$

加 $k\pi$ 到 ω 上，并且在 k 上求和，对于(A.28)的左边，给出

$$\sum_k |\Phi(2\omega+2\pi k)|^2 = K = 1, \tag{A.29}$$

由(5.57)知它是1.(A.28)右边求和给出

$$\sum_k \frac{1}{2}|H(\omega+k\pi)|^2|\Phi(\omega+k\pi)|^2. \tag{A.30}$$

把这个和分为偶指标项与奇指标项的和

$$\begin{aligned}&\sum_k \frac{1}{2}|H(\omega+2\pi k)|^2|\Phi(\omega+2\pi k)|^2\\&+\sum_k \frac{1}{2}|H(\omega+(2k+1)\pi)|^2|\Phi(\omega+(2k+1)\pi)|^2\\=&\frac{1}{2}|H(\omega)|^2\sum_k|\Phi(\omega+2\pi k)|^2\\&+\frac{1}{2}|H(\omega+\pi)|^2\sum_k|\Phi(\omega+(2k+1)\pi)|^2.\end{aligned} \tag{A.31}$$

这在使用(A.29)之后给出

$$=\frac{1}{2}|H(\omega)|^2+\frac{1}{2}|H(\omega+\pi)|^2=1, \tag{A.32}$$

这就给出了(5.20). 这需要满足尺度方程和正交关系，但不要求$\varphi(t)$的特殊的规范化. 如果观察一个有限脉冲响应滤波器，$h(n)$称为正交镜像滤波器，因为它的频率响应关于π对称.

证明7 在第2节多分辨的假定要求尺度函数与小波满足(5.1)与(2.24)

$$\varphi(t)=\sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n),\quad \varphi(t)=\sum_n h_1(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \tag{A.33}$$

并且正交性要求

$$\int\varphi(t)\varphi(t-k)\mathrm{d}t=\delta(k), \tag{A.34}$$

和

$$\int\psi(t)\varphi(t-k)\mathrm{d}t=0 \tag{A.35}$$

对于所有$k\in\mathbf{Z}$成立. 把(A.33)代入(A.35)中给出

$$\int\sum_n h_1(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)\sum_\ell h(\ell)\sqrt{2}\varphi(2t-2k-\ell)\mathrm{d}t=0, \tag{A.36}$$

重新整理并用变量替换给出

$$\sum_{n,\ell} h_1(n)h(\ell)\frac{1}{2}\int\varphi(y-n)\varphi(y-2k-\ell)\mathrm{d}y=0, \tag{A.37}$$

使用(A.34)给出

$$\sum_{n,\ell} h_1(n)h(\ell)\delta(n-2k-\ell)=0 \tag{A.38}$$

对所有$k\in\mathbf{Z}$成立. 关于ℓ求和给出

$$\sum_n h_1(n)h(n-2k)=0, \tag{A.39}$$

分(A.39)为偶指标与奇指标给出

$$\sum_m h_1(2m)h(2m-2k)+\sum_\ell h_1(2\ell+1)h(2\ell+1-2k)=0, \quad \text{(A.40)}$$

这对于所有的整数 k 一定是成立．定义 $h_e(n)=h(2n)$，$h_o(n)=h(2n+1)$，且对于任一序列 g，定义 $\bar{g}(n)=g(-n)$，这变成

$$h_e \star \bar{h}_{1e}+h_o \star \bar{h}_{1o}=0. \quad \text{(A.41)}$$

由 φ 和 ψ 的平移的规范正交性，我们能类似地得到：

$$h_e \star \bar{h}_e+h_o \star \bar{h}_o=\delta. \quad \text{(A.42)}$$

$$h_{1e} \star \bar{h}_{1e}+h_{1o} \star \bar{h}_{1o}=\delta. \quad \text{(A.43)}$$

这可以表示为

$$\begin{bmatrix} h_e & h_o \\ h_{1e} & h_{1o} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} \bar{h}_e & \bar{h}_{1e} \\ \bar{h}_o & \bar{h}_{1o} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}. \quad \text{(A.44)}$$

假定序列是有限长的，(A.44)可以用于证明

$$h_e \star h_{1o}-h_o \star h_{1e}=\pm \delta_k, \quad \text{(A.45)}$$

其中 $\delta_k(n)=\delta(n-k)$．事实上，取(A.44)的 Z 变换，我们使用第 8 章的记号，得到 $H_p(z)H_p^{\mathrm{T}}(z^{-1})=I$. 因为滤波器是有限脉冲响应的，$H_p(z)$ 是具有多项式矩阵逆的一个(Laurent)多项式矩阵．所以，对于某个整数 k，$H_p(z)$ 的行列式是形如 $\pm z^k$ 的．这等价于(A.45)．现在，在(A.45)两边用 $\bar{h}_e$ 做卷积，得到

$$\begin{aligned} \pm \bar{h}_e \star \delta_k &= [h_e \star h_{1o}-h_o \star h_{1e}] \star \bar{h}_e=[h_e \star \bar{h}_e \star h_{1o}-h_{1e} \star \bar{h}_e \star h_o] \\ &= [h_e \star \bar{h}_e \star h_{1o}+h_{1o} \star \bar{h}_o \star h_o]=[h_e \star \bar{h}_e+h_o \star \bar{h}_o] \star h_{1o} \\ &= h_{1o}. \end{aligned} \quad \text{(A.46)}$$

类似地，在(A.45)两边用 $\bar{h}_o$ 做卷积，得到

$$\mp \bar{h}_o \star \delta_k=h_{1e}. \quad \text{(A.47)}$$

结合(A.46)与(A.47)给出

$$h_1(n)=\pm(-1)^n h(-n+1-2k). \quad \text{(A.48)}$$

证明 8　我们证明小波的积分是零，由(A.33b)两边积分给出

$$\int \psi(t)\mathrm{d}t=\sum_n h_1(n)\int \sqrt{2}\varphi(2t-n)\mathrm{d}t, \quad \text{(A.49)}$$

而右边的积分是 A_0，通常规范化为 1，并且由(5.17)或(A.9)以及(A.48)知，

$$\sum_n h_1(n)=0. \quad \text{(A.50)}$$

所以，由(A.49)知，小波的积分是零．

在时间域中用 $(-1)^n$ 乘的事实等价于在频域中平移 π，给出 $H_1(\omega)=H(\omega+\pi)$.

附录 B　对 5.8 节性质的推导

在这个附录中，我们讨论在 5.8 节与其他地方给出的关于尺度函数、小波及尺度函数与小波的系数的大多数结果．为方便，这里我们重复(5.1)、(5.10)、(5.13)和(5.15)

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \tag{B.1}$$

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2}, \tag{B.2}$$

$$\int\varphi(t)\varphi(t-k)\,\mathrm{d}t = E\delta(k) = \begin{cases} E & \text{若 } k=0 \\ 0 & \text{其他的} \end{cases}, \tag{B.3}$$

如果规范化

$$\int\varphi(t)\varphi(t-k)\,\mathrm{d}t = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{若 } k=0 \\ 0 & \text{其他的} \end{cases}. \tag{B.4}$$

本附录的结果参考在正文中写出的方程．

方程(5.45)是(5.15)的规范化和对于 $k=0$ 及 $E=1$ 的(B.3)要求的规范正交条件的部分．

方程(5.53)如果 $\varphi(x-k)$ 是正交的，那么(B.3)表明

$$\int\varphi(x+m)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = E\delta(m), \tag{B.5}$$

两边关于 m 求和给出

$$\sum_m\int\varphi(x+m)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = E, \tag{B.6}$$

交换顺序之后是

$$\int\varphi(x)\sum_m\varphi(x+m)\,\mathrm{d}x = E. \tag{B.7}$$

使用(5.50)、(B.20)与(B.23)给出

$$\int\varphi(x)\,\mathrm{d}xA_0 = E, \tag{B.8}$$

而由(B.18)，$\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x = A_0$，所以

$$A_0^2 = E. \tag{B.9}$$

如果尺度函数没有规范为 1，那么我们可以证明(5.53)的更一般的结果．注意，(5.50)更一般的形式是

$$\sum_m\varphi(x+m) = \int\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{B.10}$$

如果我们没有在(B.19)到(B.23)中规范化 $A_0=1$.

方程(5.53)由(B.3)关于 m 求和得到为

$$\sum_m \int \varphi(x+m)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int \varphi(x)^2 \mathrm{d}x, \tag{B.11}$$

在交换顺序后给出

$$\int \varphi(x) \sum_m \varphi(x+m)\mathrm{d}x = \int \varphi(x)^2 \mathrm{d}x, \tag{B.12}$$

并且使用(B.10)给出(5.53).

方程(5.46)是通过对基本递推方程的右边应用基本递推方程导出的，这给出

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\sum_k h(k)\sqrt{2}\varphi(2(2t-n)-k), \tag{B.13}$$

使用变量替换 $\ell = 2n+k$ 和交换运算的顺序，这变成

$$\varphi(t) = \sum_\ell \left[\sum_n h(n)h(\ell-2n)\right] 2\varphi(4t-\ell). \tag{B.14}$$

应用 j 次给出在(5.46)中的结果．类似的结果可以对于小波导出．

方程(5.48)是用定义和

$$A_J = \sum_\ell \varphi\left(\frac{\ell}{2^J}\right) \tag{B.15}$$

导出的，使用基本递推方程(B.1)给出

$$A_J = \sum_\ell \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi\left(2\frac{\ell}{2^J}-n\right). \tag{B.16}$$

交换和的顺序给出

$$A_J = \sqrt{2}\sum_n h(n)\left\{\sum_\ell \varphi\left(\frac{\ell}{2^{J-1}}-n\right)\right\},$$

而关于 ℓ 的求和不依赖于整数平移，所以使用(B.2)与(B.15)给出

$$A_J = \sqrt{2}\sqrt{2}\sum_n h(n)\left\{\sum_\ell \varphi\left(\frac{\ell}{2^{J-1}}\right)\right\} = 2A_{J-1}. \tag{B.17}$$

这是线性差分方程

$$A_J - 2A_{J-1} = 0, \tag{B.18}$$

它有如几何序列的一个解

$$A_J = A_0 2^J. \tag{B.19}$$

如果极限存在，用 2^J 除的方程(B.15)是黎曼和，它的极限是 $\varphi(x)$ 的黎曼积分的定义

$$\lim_{J\to\infty}\left\{A_J \frac{1}{2^J}\right\} = \int \varphi(x)\mathrm{d}x = A_0. \tag{B.20}$$

在(5.57)指出并在(B.15)证明的，如果 $\varphi(x)$ 是规范化的，那么 $A_0 = 1$ 并且(B.19)变成

$$A_J = 2^J. \tag{B.21}$$

这给出(5.48).

方程(B.20)表明了 $\varphi(x)$ 的另一个值得注意的性质，在括号中的项恰好等于积分，而

不依赖于 J. 不需要取极限.

方程(5.49)是 $\varphi(x)$的"单位划分". 由(5.48)置 $J=0$ 得出.

方程(5.50)是(5.49)的推广, 注意, 对于任一整数 $M\geqslant J$ 和 L, 在(5.48)中的和是与形如下的平移无关的

$$\sum_{\ell}\varphi\left(\frac{\ell}{2^J}-\frac{L}{2^M}\right)=2^J \tag{B.22}$$

当 $M\to\infty$ 时, $\frac{L}{2^M}$可以取得任意接近任一 x, 所以, 如果 $\varphi(x)$是连续的

$$\sum_{\ell}\varphi\left(\frac{\ell}{2^J}-x\right)=2^J. \tag{B.23}$$

这给出(5.50), 并且对于 $J=0$ 变成(5.49). 由于明显的理由, 方程(5.50)称为一种"单位划分".

对于更一般的定义方程(7.4), 尺度函数的第一个到第四个关系推广的形式成立. 只有(5.48)是不同的. 对于整数 M, 它变成

$$\sum_{k}\varphi\left(\frac{k}{M^J}\right)=M^J \tag{B.24}$$

或许可能证明 M 可以是某一有理数.

方程(5.51)、(5.72)和(5.52)是尺度函数的傅里叶变换的递推关系, 在(B.1)两边简单地取变换(5.2)给出

$$\Phi(\omega)=\sum_{n}h(n)\int\sqrt{2}\varphi(2t-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t, \tag{B.25}$$

在变量替换 $y=2t-n$ 之后, 这变成

$$\Phi(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n}h(n)\int\varphi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(y+n)/2}\mathrm{d}y,$$

并且使用(5.3)给出

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n}h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n/2}\int\varphi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega y/2}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}H(\omega/2)\Phi(\omega/2),$$

这是(5.51)和(5.72). 使用这个公式, 递推地给出无穷乘积(5.52), 这对任一规范化成立.

方程(5.57)叙述尺度函数的傅里叶变换的抽样的平方和是1, 如果抽样是间隔 2π 的均匀抽样. 在附录A中另外的推导表明, 用 $\varphi(x)$的傅里叶变换的定义, 每个 $2\pi k$ 点抽样, 并且乘它的复共轭

$$\Phi(\omega+2\pi k)\overline{\Phi(\omega+2\pi k)}=\int\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+2\pi k)x}\mathrm{d}x\int\varphi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+2\pi k)y}\mathrm{d}y, \tag{B.26}$$

关于 k 求和给出

$$\begin{aligned}\sum_k |\Phi(\omega+2\pi k)|^2 &= \sum_k \iint \varphi(x)\varphi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(x-y)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint \varphi(x)\varphi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(y-x)}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k(y-x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint \varphi(x)\varphi(x+z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega z}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{B.27}$$

而

$$\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kz} = \sum_\ell \delta(z-\ell), \tag{B.28}$$

所以

$$\sum_k |\Phi(\omega+2\pi k)|^2 = \int \varphi(x)\sum_\ell \varphi(x+\ell)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\ell}\mathrm{d}x,$$

这变为

$$\sum_\ell \int \varphi(x)\varphi(x+\ell)\mathrm{d}x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\ell}. \tag{B.29}$$

因为 $\varphi(x)$ 整数平移的正交性，这不是 ω 的函数，而是 $\int |\varphi(x)|^2\mathrm{d}x$，如果规范化，像在(5.57)中叙述的，它是 1. 这是(5.13)的频域等价式.

方程(5.58)和(5.59)表明尺度函数怎样决定方程的系数. 这是用 $\varphi(2x-m)$ 乘(B.1)的两边导出的，并且积分给出

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)\varphi(2x-m)\mathrm{d}x &= \int \sum_n h(n)\varphi(2x-n)\varphi(2x-m)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_\ell h(n)\int \varphi(x-n)\varphi(x-m)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{B.30}$$

使用正交性条件(B.3)给出

$$\int \varphi(x)\varphi(2x-m)\mathrm{d}x = h(m)\frac{1}{\sqrt{2}}\int |\varphi(y)|^2\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}h(m),$$

这就给出(5.58). 类似的论证给出(5.59).

附录 C　MATLAB 程序

为了任一科学目的，你可以免费的使用这些程序或由它们导出的程序，但是请参考本书．这些程序的更新说明和其他的程序可以在我们的网页 http://www-dsp.rice.edu/得到．

```
function p = psa(h,kk)
% p = psa(h,kk)   calculates samples of the scaling function
%  phi(t) = p  by  kk  successive approximations from the
%  scaling coefficients  h.  Initial iteration is a constant.
%  phi_k(t) is plotted at each iteration.     csb 5/19/93
%
if nargin==1, kk=11; end;          % Default number of iterations
h2= h*2/sum(h);                    % normalize  h(n)
K = length(h2)-1; S = 128;         % Sets sample density
p = [ones(1,3*S*K),0]/(3*K);       % Sets initial iteration
P = p(1:K*S);                      % Store for later plotting
axis([0 K*S+2 -.5 1.4]);
hu = upsam(h2,S);                  % upsample h(n) by S
for iter = 0:kk                    % Successive approx.
   p = dnsample(conv(hu,p));       % convolve and down-sample
   plot(p); pause;                 % plot each iteration
%   P = [P;p(1:K*S)];               % store each iter. for plotting
end
p = p(1:K*S);                      % only the supported part
L = length(p);
x = ([1:L])/(S);
axis([0 3 -.5 1.4]);
plot(x,p);                         % Final plot
title('Scaling Function by Successive Approx.');
ylabel('Scaling Function');
xlabel('x');
function p = pdyad(h,kk)
% p = pdyad(h,kk)  calculates approx. (L-1)*2^(kk+2) samples of the
%  scaling function  phi(t) = p  by  kk+3  dyadic expansions
%  from the scaling coefficient vector h  where L=length(h).
%  Also plots  phi_k(t)  at each iteration.    csb 5/19/93
%
if nargin==1, kk = 8; end                 % Default iterations
h2 = h*2/sum(h);                          % Normalize
N = length(h2); hr = h2(N:-1:1); hh = h2;
axis([0,N-1,-.5,1.4]);
MR = [hr,zeros(1,2*N-2)];                 % Generater row for MO
MT = MR; MO = [];
```

```
for k = 1:N-1                                 % Generate convolution and
   MR = [0, 0, MR(1:3*N-4)];                  %   downsample matrix from h(n)
   MT = [MT; MR];
end
MO = MT(:,N:2*N-1);                           % MO*p = p  if p samples of phi
MI = MO - eye(N);
MJ = [MI(1:N-1,:);ones(1,N)];
pp = MJ\[zeros(N-1,1);1];                     % Samples of phi at integers
p  = pp(2:length(pp)-1).';
   x = [0:length(p)+1]*(N-1)/(length(p)+1); plot(x,[0,p,0]); pause
p = conv(h2,p);                               % value on half integers
   x = [0:length(p)+1]*(N-1)/(length(p)+1); plot(x,[0,p,0]); pause
y = conv(h2,dnsample(p));                     % convolve and downsample
p = merge(y,p);                               % interleave values on Z and Z/2
   x = [0:length(p)+1]*(N-1)/(length(p)+1); plot(x,[0,p,0]); pause
for k = 1:kk
   hh = upsample(hh);                         % upsample coefficients
   y = conv(hh,y);                            % calculate intermediate terms
   p = merge(y,p);                            % insert new terms between old
   x = [0:length(p)+1]*(N-1)/(length(p)+1); plot(x,[0,p,0]); pause;
end
title('Scaling Function by Dyadic Expansion');
ylabel('Scaling Function');
xlabel('x');
axis;
```

```
function [hf,ht] = pf(h,kk)
% [hf,ht] = pf(h,kk) computes and plots hf, the Fourier transform
%  of the scaling function  phi(t)  using the freq domain
%  infinite product formulation with kk iterations from the scaling
%  function coefficients h.  Also calculates and plots ht = phi(t)
%  using the inverse FFT                        csb 5/19/93
if nargin==1, kk=8; end            % Default iterations
L = 2^12; P = L;                   % Sets number of sample points
hp = fft(h,L); hf = hp;            % Initializes iteration
plot(abs(hf));pause;               % Plots first iteration
for k = 1:kk                       % Iterations
  hp = [hp(1:2:L), hp(1:2:L)];     % Sample
  hf = hf.*hp/sqrt(2);             % Product
  plot(abs(hf(1:P/2)));pause;      % Plot Phi(omega) each iteration
     P=P/2;                        % Scales axis for plot
end;
ht = real(ifft(hf));               % phi(t) from inverse FFT
ht = ht(1:8*2^kk); plot(ht(1:6*2^kk));   % Plot phi(t)
```

```
function hn = daub(N2)
%  hn = daub(N2)
%  Function to compute the Daubechies scaling coefficients from
%  her development in the paper, "Orthonormal bases of compactly
%  supported wavelets", CPAM, Nov. 1988 page 977, or in her book
%  "Ten Lectures on Wavelets", SIAM, 1992 pages 168, 216.
%  The polynomial R in the reference is set to zero and the
%  minimum phase factorization is used.
%  Not accruate for N > 20.  Check results for long h(n).
%    Input:   N2 = N/2, where N is the length of the filter.
%    Output:  hn = h(n) length-N min phase scaling fn  coefficients
%  by rag 10/10/88, csb 3/23/93
a  = 1;   p = 1;   q = 1;       % Initialization of variables
hn = [1 1];                     % Initialize factors of zeros at -1
for j = 1:N2-1,
   hn = conv(hn,[1,1]);         % Generate polynomial for zeros at -1
   a  = -a*0.25*(j+N2-1)/j;     % Generate the binomial coeff. of L
   p  = conv(p,[1,-2,1]);       % Generate variable values for L
   q  = [0 q 0] + a*p;          % Combine terms for L
end;
q  = sort(roots(q));                         % Factor L
hn = conv(hn,real(poly(q(1:N2-1))));         % Combine zeros at -1 and L
hn = hn*sqrt(2)/(sum(hn));                   % Normalize

function h = h246(a,b)
% h = h246(a,b) generates orthogonal scaling function
%  coefficients  h(n)  for lengths 2, 4, and 6 using
%  Resnikoff's parameterization with angles a and b.
%  csb.  4/4/93
if a==b,  h = [1,1]/sqrt(2);               % Length-2
elseif b==0
   h0 = (1 - cos(a) + sin(a))/2;           % Length-4
   h1 = (1 + cos(a) + sin(a))/2;
   h2 = (1 + cos(a) - sin(a))/2;
   h3 = (1 - cos(a) - sin(a))/2;
   h  = [h0 h1 h2 h3]/sqrt(2);
else                                        % Length-6
   h0 = ((1+cos(a)+sin(a))*(1-cos(b)-sin(b))+2*sin(b)*cos(a))/4;
   h1 = ((1-cos(a)+sin(a))*(1+cos(b)-sin(b))-2*sin(b)*cos(a))/4;
   h2 = (1+cos(a-b)+sin(a-b))/2;
   h3 = (1+cos(a-b)-sin(a-b))/2;
   h4 = (1-h0-h2);
   h5 = (1-h1-h3);
   h = [h0 h1 h2 h3 h4 h5]/sqrt(2);
end
```

```
function [a,b] = ab(h)
% [a,b] = ab(h) calculates the parameters a and b from the
%  scaling function coefficient vector h for orthogonal
%  systems of length 2, 4, or 6 only.     csb. 5/19/93.
%
h = h*2/sum(h);  x=0;                              % normalization
if length(h)==2, h = [0 0 h 0 0]; x=2; end;
if length(h)==4, h = [0 h 0]; x=4; end;
a = atan2((2*(h(1)^2+h(2)^2-1)+h(3)+h(4)),(2*h(2)*(h(3)-1)-2*h(1)*(h(4)-1)));
b = a - atan2((h(3)-h(4)),(h(3)+h(4)-1));
if x==2, a = 1; b = 1; end;
if x==4, b = 0; end;


function y = upsample(x)
% y = upsample(x) inserts zeros between each term in the row vector x.
%  for example:   [1 0 2 0 3 0] = upsample([1 2 3]).   csb 3/1/93.
L = length(x);
y(:) = [x;zeros(1,L)]; y = y.';
y = y(1:2*L-1);

function y = upsam(x,S)
% y = upsam(x,S) inserts S-1 zeros between each term in the row vector x.
%  for example:   [1 0 2 0 3 0] = upsample([1 2 3]).   csb 3/1/93.
L = length(x);
y(:) = [x;zeros(S-1,L)]; y = y.';
y = y(1:S*L-1);


function y = dnsample(x)
% y = dnsample(x) samples x by removing the even terms in x.
%  for example:   [1 3] = dnsample([1 2 3 4]).   csb 3/1/93.
L = length(x);
y = x(1:2:L);


function z = merge(x,y)
% z = merge(x,y) interleaves the two vectors x and y.
% Example [1 2 3 4 5] = merge([1 3 5],[2 4]).
%  csb 3/1/93.
%
```

```
z = [x;y,0];
z = z(:);
z = z(1:length(z)-1).';
```

```
function w = wave(p,h)
% w = wave(p,h)   calculates and plots the wavelet  psi(t)
%  from the scaling function  p  and the scaling function
%  coefficient vector h.
%  It uses the definition of the wavelet.  csb. 5/19/93.
%
h2 = h*2/sum(h);
NN = length(h2); LL = length(p); KK = round((LL)/(NN-1));
h1u = upsam(h2(NN:-1:1).*cos(pi*[0:NN-1]),KK);
w  = dnsample(conv(h1u,p)); w  = w(1:LL);
xx = [0:LL-1]*(NN-1)/(LL-1);
axis([1 2 3 4]); axis;
plot(xx,w);
function g = dwt(f,h,NJ)
% function g = dwt(f,h,NJ); Calculates the DWT of periodic  g
%  with scaling filter  h  and  NJ  scales.   rag & csb 3/17/94.
%
N = length(h);  L = length(f);
c = f;  t = [];
if nargin==2, NJ = round(log10(L)/log10(2)); end; % Number of scales
h0  = fliplr(h);                                 % Scaling filter
h1 = h;  h1(1:2:N) = -h1(1:2:N);                 % Wavelet filter
for j = 1:NJ                                     % Mallat's algorithm
   L = length(c);
   c = [c(mod((-(N-1):-1),L)+1) c];              % Make periodic
   d = conv(c,h1);    d = d(N:2:(N+L-2));        % Convolve & d-sample
   c = conv(c,h0);    c = c(N:2:(N+L-2));        % Convolve & d-sample
   t = [d,t];                                    % Concatenate wlet coeffs.
end;
g = [c,t];                                       % The DWT
```

```
function f = idwt(g,h,NJ)
% function f = idwt(g,h,NJ); Calculates the IDWT of periodic  g
%  with scaling filter  h  and  NJ  scales.   rag & csb 3/17/94.
%
```

```
L = length(g);   N = length(h);
if nargin==2, NJ = round(log10(L)/log10(2)); end; % Number of scales
h0 = h;                                         % Scaling filter
h1 = fliplr(h);  h1(2:2:N) = -h1(2:2:N);        % Wavelet filter
LJ = L/(2^NJ);                                  % Number of SF coeffs.
c  = g(1:LJ);                                   % Scaling coeffs.
for j = 1:NJ                                    % Mallat's algorithm
   w  = mod(0:N/2-1,LJ)+1;                      % Make periodic
   d  = g(LJ+1:2*LJ);                           % Wavelet coeffs.
   cu(1:2:2*LJ+N) = [c c(1,w)];                 % Up-sample & periodic
   du(1:2:2*LJ+N) = [d d(1,w)];                 % Up-sample & periodic
   c  = conv(cu,h0) + conv(du,h1);              % Convolve & combine
   c  = c(N:N+2*LJ-1);                          % Periodic part
   LJ = 2*LJ;
end;
f = c;                                          % The inverse DWT


function r = mod(m,n)
% r = mod(m,n) calculates r = m modulo n
%
r = m - n*floor(m/n);                           % Matrix modulo n
function g = dwt5(f,h,NJ)
% function g = dwt5(f,h,NJ)
% Program to calculate the DWT from the L samples of f(t) in
% the vector  f  using  the scaling filter h(n).
%  csb 3/20/94
%
N = length(h);
c = f;  t = [];
if nargin==2
   NJ = round(log10(L)/log10(2));              % Number of scales
end;
h1 = h;  h1(1:2:N) = -h1(1:2:N);               % Wavelet filter
h0  = fliplr(h);                               % Scaling filter
for j = 1:NJ                                   % Mallat's algorithm
   L  = length(c);
   d  = conv(c,h1);                            % Convolve
   c  = conv(c,h0);                            % Convolve
   Lc = length(c);
   while Lc > 2*L                              % Multi-wrap?
     d  = [(d(1:L) + d(L+1:2*L)), d(2*L+1:Lc)]; % Wrap output
     c  = [(c(1:L) + c(L+1:2*L)), c(2*L+1:Lc)]; % Wrap output
     Lc = length(c);
```

```
    end
    d = [(d(1:N-1) + d(L+1:Lc)), d(N:L)];  % Wrap output
    d = d(1:2:L);                          % Down-sample wlets coeffs.
    c = [(c(1:N-1) + c(L+1:Lc)), c(N:L)];  % Wrap output
    c = c(1:2:L);                          % Down-sample scaling fn c.
    t = [d,t];                             % Concatenate wlet coeffs.
end                                        % Finish wavelet part
g = [c,t];                                 % Add scaling fn coeff.

function a = choose(n,k)
% a = choose(n,k)
% BINOMIAL COEFFICIENTS
% allowable inputs:
% n : integer, k : integer
% n : integer vector, k : integer
% n : integer, k : integer vector
% n : integer vector, k : integer vector (of equal dimension)
nv = n;
kv = k;
if (length(nv) == 1) & (length(kv) > 1)
nv = nv * ones(size(kv));
elseif (length(nv) > 1) & (length(kv) == 1)
kv = kv * ones(size(nv));
end
a = nv;
for i = 1:length(nv)
   n = nv(i);
   k = kv(i);
   if n >= 0
      if k >= 0
         if n >= k
            c = prod(1:n)/(prod(1:k)*prod(1:n-k));
         else
            c = 0;
         end
     else
        c = 0;
     end
   else
      if k >= 0
         c = (-1)^k * prod(1:k-n-1)/(prod(1:k)*prod(1:-n-1));
      else
         if n >= k
            c = (-1)^(n-k)*prod(1:-k-1)/(prod(1:n-k)*prod(1:-n-1));
         else
            c = 0;
         end
      end
    end
      a(i) = c;
   end
```

参 考 文 献

我们特别地推荐五本另外的书来补充本书．对于小波分析的历史、原理和概况 Barbara Burke Hubbard[Hub96]已经写过了．小波理论的数学细节的最好来源是 Ingrid Daubechies[Dau92]．从离散时间小波级数和滤波器组方法出发的两本一般的书是由 Martin Vetterli 与 Jelena Kovačević[VK95]和 Gilbert Strang 与 Truong Nguyen[SN96]给出的．P. P. Vaiyanathan 写了一本关于滤波器组和多级系统的好书[Vai92]．

近期在紧支撑方面的兴趣是由 Daubechies[Dau90, Dau88a, Dau92, CDV93]和 S. Mallat[Mal89b, Mal89c, Mal89a]以及其他的作者[Law90, Law91b]激发的．一个强有力的观点近来由 D. L. Donoho、I. M. Johnstone、R. R. Coifman 和其他的作者[Don93b, Don95, Don93a, Donar, DJKP95b, DJ95, DJ94a, BDGM94, CD95a, CD95b]给出．使用滤波器在 DSP 共同体中的发展来自于 Smith 与 Barnwell[SB86a, SB87]、Vetterli[Vet86, Vet87, VG89, VK95]和 Vaidyanathan [Vai87a, VM88, Vai92]．莱斯大学的一些工作记录在[Gop90, GB95c, SHGB93, GB95b, Gop92, Bur93, GOL*94a, GOL*94b, OGL*95, LGO*95, WOG*95a][LGOB95, GLOB95, LGO*96, WOG*95b, WB95]中．使用 MATLAB 计算机软件系统分析和试验的工作在[MLB89, MMOP96]中给出．总结和导引工作能在[GKM89, Mey89, Dau89, Bur93, Coi90, Str89, GB92c, Rus92, BNW94, Bur94, Str94][RV91, JS94a, Ngu95b, VD95, BDG96]中找到．两期 IEEE Transactions 特刊集中于小波方法[DMW92, DFN*93]．关于一些编辑了会议文献的小波的书包括[CGT89, KR90, AKM90, Mey90, Mey92a, Chu92a, Chu92b, Dau92, Vai92, AH92, RBC*92, Mal92, Mey92b][You93, Mey93, BF93, SW93, Koo93, FHV93, Fli94, CMP94, FK94, Kai94][Wal94, Mas94, VK95, Wic95, SN96, AU96, HW96b, Wor96, Hub96, Tas96][AH92, Mal97, Tew97, AS96, RW97, Chu97]．

跟上关于小波的研究潮流和结果的另外的途径是读在宽带网上由 Wim Sweldens 编得的小波文摘(Wavelet Digest)，http://www.math.scarolina.edu/~wavelet.

223

[AAEG89] F. Argoul, A. Arneodo, J. Elezgaray, and G. Grasseau. Wavelet transform of fractal aggregates. *Physics Letters A.*, 135:327–336, March 1989.

[AAU96] Akram Aldroubi, Patrice Abry, and Michael Unser. Construction of biorthogonal wavelets starting from any two multiresolutions. *preprint*, 1996.

[AH92] A. N. Akansu and R. A. Haddad. *Multiresolution Signal Decomposition, Transforms, Subbands, and Wavelets.* Academic Press, San Diego, CA, 1992.

[AKM90] Louis Auslander, Tom Kailath, and Sanjoy K. Mitter, editors. *Signal Processing, Part I: Signal Processing Theory.* Springer-Verlag, New York, 1990. IMA Volume 22, lectures from IMA program, July 1988.

[Ald96] A. Aldroubi. *Oblique and Hierarchical Multiwavelet Bases.* Technical Report, National Institutes of Health, December 1996.

[Alp93] B. Alpert. A class of bases in l^2 for the sparce representation of integral operators. *SIAM J. Math. Analysis*, 24, 1993.

[AS96] Ali N. Akansu and Mark J. T. Smith. *Subband and Wavelet Transforms, Design and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[AU96] Akram Aldroubi and Michael Unser, editors. *Wavelets in Medicine and Biology.* CRC Press, Boca Raton, 1996.

[Aus89] P. Auscher. *Ondelettes fractales et applications.* PhD thesis, 1989.

[AWW92] P. Auscher, G. Weiss, and M. V. Wickerhauser. Local sine and cosine bases of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets. In C. K. Chui, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, pages 15–51, Academic Press, 1992. Volume 2 in series on Wavelet Analysis and its Applications.

[BBH93] J. N. Bradley, C. M. Brislawn, and T. Hopper. The FBI wavelet/scalar quantization standard for gray-scale fingerprint image compression. In *Visual Info. Process. II*, SPIE, Orlando, FL, April 1993.

[BBOH96] C. M. Brislawn, J. N. Bradley, R. J. Onyshczak, and T. Hopper. The FBI compression standard for digitized fingerprint images. In *Proceedings of the SPIE Conference 2847, Applications of Digital Image Processing XIX*, 1996.

[BC92] S. Basu and C. Chiang. Complete parameterization of two dimensional orthonormal wavelets. In *Proceedings of IEEE-SP Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Methods '92, Victoria, BC*, IEEE, 1992.

[BCG94] Jonathan Berger, Ronald R. Coifman, and Maxim J. Goldberg. Removing noise from music using local trigonometric bases and wavelet packets. *Journal of the Audio Engineering Society*, 42(10):808–817, October 1994.

[BCR91] G. Beylkin, R. R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 44:141–183, 1991.

[BCR92] G. Beylkin, R. R. Coifman, and V. Rokhlin. Wavelets in numerical analysis. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, I. Daubechies, Y. Meyer, R. Coifman, S. Mallat, and L Raphael, editors, *Wavelets and Their Applications*, pages 181–210, Jones and Bartlett, Boston, 1992. Outgrowth of the NSF/CBMS Conference on Wavelets, Lowell, June 1990.

[BCW90] T. C. Bell, J. G. Cleary, and I. H. Witten. *Text Compression*. Prentice Hall, N.J., 1990.

[BDG96] Andrew Brice, David Donoho, and Hong-Ye Gao. Wavelet analysis. *IEEE Spectrum*, 33(10):26–35, October 1996.

[BDGM94] A. G. Bruce, D. L. Donoho, H.-Y. Gao, and R. D. Martin. Denoising and robust nonlinear wavelet analysis. In *Proceedings of Conference on Wavelet Applications*, pages 325–336, SPIE, Orlando, FL, April 1994.

[BE93] F. Bao and Nurgun Erdol. On the discrete wavelet transform and shiftability. In *Proceedings of the Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 1442–1445, Pacific Grove, CA, November 1993.

[BE94] F. Bao and N. Erdol. The optimal wavelet transform and translation invariance. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages III:13–16, ICASSP-94, Adelaide, May 1994.

[Bey92] G. Beylkin. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(6):1716–1740, December 1992.

[Bey94] G. Beylkin. On wavelet-based algorithms for solving differential equations. In John J. Benedetto and Michael W. Frazier, editors, *Wavelets: Mathematics and Applications*, pages 449–466, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[Bey97] Gregory Beylkin. An adaptive pseudo-wavelet approach for solving nonlinear partial differential equations. In W. Dahmen, A. Kurdila, and P. Oswald, editors, *Multiscale Wavelet Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1997. Volume 6 in the series: Wavelet Analysis and Applications.

[BF93] John J. Benedetto and Michael W. Frazier, editors. *Wavelets: Mathematics and Applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

[BK97] Gregory Beylkin and James M Keiser. On the adaptive nomerical solution of nonlinear partial differential equations in wavelet bases. *Journal of Computational Physics*, 132:233–259, 1997.

[BKV93] G. Beylkin, J. M. Keiser, and L. Vozovoi. *A New Class of Stabel Time Discretization Schemes for the Solution of Nonlinear PDE's*. Technical Report, Applied Mathematics Program, University of Colorado, Boulder, CO, 1993.

[BM95] Albert P. Berg and Wasfy B. Mikhael. An efficient structure and algorithm for the mixed transform representation of signals. In *Proceedings of the 29th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, CA, November 1995.

[BNW94] A. Benveniste, R. Nikoukhah, and A. S. Willsky. Multiscale system theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, I*, 41(1):2–15, January 1994.

[BO96] C. S. Burrus and J. E. Odegard. Wavelet systems and zero moments. *IEEE Transactions on Signal Processing*, submitted, November 1 1996. Also CML Technical Report, Oct. 1996.

[BO97] C. Sidney Burrus and Jan E. Odegard. Generalized coiflet systems. In *Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing*, Santorini, Greece, July 1997.

[Boa92] Boualem Boashash, editor. *Time-Frequency Signal Analysis*. Wiley, Halsted Press, New York, 1992. Result of 1990 Special Converence on Time-Frequency Analysis, Gold Coast, Australia.

[BP85] C. S. Burrus and T. W. Parks. *DFT/FFT and Convolution Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1985.

[Bur93] C. S. Burrus. *Scaling Functions and Wavelets*. first version written in 1989, The Computational Mathematics Lab. and ECE Dept., Rice University, Houston, Tx, 1993.

[Bur94] Barbara Burke. The mathematical microscope: waves, wavelets, and beyond. In M. Bartusiak, et al, editor, *A Positron Named Priscilla, Scientific Discovery at the Frontier*, chapter 7, pages 196–235, National Academy Press, Washington, DC, 1994.

[BW94] Michael Burrows and David J. Wheeler. *A Block-Sorting Lossless Data Compression Algorithm*. Technical Report 124, Digital Systems Research Center, Palo Alto, 1994.

[CD94] Shaobing Chen and David L. Donoho. Basis pursuit. In *Proceedings of the 28th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, pages 41–44, Pacific Grove, CA, November 1994. Also Stanford Statistics Dept. Report, 1994.

[CD95a] Shaobing Chen and David L. Donoho. *Atomic Decomposition by Basis Pursuit*. Technical Report 479, Statistics Department, Stanford, May 1995. preprint.

[CD95b] R. R. Coifman and D. L. Donoho. Translation-invariant de-noising. In Anestis Antoniadis, editor, *Wavelets and Statistics*, Springer-Verlag, to appear 1995. Springer Lecture Notes.

[CDF92] A. Cohen, I. Daubechies, and J. C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45:485–560, 1992.

[CDM91] S. Cavaretta, W. Dahmen, and C. A. Micchelli. *Stationary Subdivision*. Volume 93, American Mathematical Society, 1991.

[CDP95] A. Cohen, I. Daubechies, and G. Plonka. *Regularity of refinable function vectors*. Technical Report 95/16, Universität Rostock, 1995. To appear in: J. Fourier Anal. Appl.

[CDV93] Albert Cohen, Ingrid Daubechies, and Pierre Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1(1):54–81, December 1993.

[CGT89] J. M. Combes, A. Grossmann, and P. Tchamitchian, editors. *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Proceedings of the International Conference, Marseille, France, December 1987.

[Chu92a] Charles K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, San Diego, CA, 1992. Volume 1 in the series: *Wavelet Analysis and its Applications*.

[Chu92b] Charles K. Chui. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, San Diego, CA, 1992. Volume 2 in the series: *Wavelet Analysis and its Applications*.

[Chu97] Charles K. Chui. *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*. SIAM, Philadilphia, 1997.

[CL96] C. K. Chui and J. Lian. A study of orthonormal multi-wavelets. *Applied Numerical Mathematics*, 20(3):273–298, March 1996.

[CM94] Ronald R. Coifman and Fazal Majid. *Adapted Waveform Analysis and Denoising*. Technical Report, Yale University, New Haven, 1994.

[CMP94] Charles K. Chui, Laura Montefusco, and Luigia Puccio, editors. *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. Academic Press, San Diego, 1994. Volume 5 in the series: *Wavelet Analysis and its Applications*.

[CMQW92] R. R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake, and M. V. Wickerhauser. Signal processing and compression with wave packets. In Y. Meyer, editor, *Proceedings of the International Conference on Wavelets, 1989 Marseille*, Masson, Paris, 1992.

[CMW92] R. R. Coifman, Y. Meyer, and M. V. Wickerhauser. Wavelet analysis and signal processing. In M. B. Ruskai et al., editor, *Wavelets and Their Applications*, Jones and Bartlett, Boston, 1992.

[CMX96] Z. Chen, C. A. Micchelli, and Y. Xu. *The Petrov-Galerkin Method for Second Kind Integral Equations II: Multiwavelet Schemes*. Technical Report, Math. Dept. North Dakota State University, November 1996.

[CNKS96] T. Cooklev, A. Nishihara, M. Kato, and M. Sablatash. Two-channel multifilter banks and multiwavelets. In *IEEE Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 2769–2772, 1996.

[Coh89] L. Cohen. Time-frequency distributions - a review. *Proceedings of the IEEE*, 77(7):941–981, 1989.

[Coh92] A. Cohen. Biorthogonal wavelets. In Charles K. Chui, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, Boca Raton, 1992. Volume 2 in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[Coh95] Leon Cohen. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[Coi90] R. R. Coifman. Wavelet analysis and signal processing. In Louis Auslander, Tom Kailath, and Sanjoy K. Mitter, editors, *Signal Processing, Part I: Signal Processing Theory*, pages 59–68, Springer-Verlag, New York, 1990. IMA vol. 22, lectures from IMA Program, summer 1988.

[Cro96] Matthew Crouse. *Frame Robustness for De-Noising*. Technical Report, EE 696 Course Report, Rice University, Houston, Tx, May 1996.

[CS93] A. Cohen and Q. Sun. An arthmetic characterization of the conjugate quadrature filters associated to orthonormal wavelet bases. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 24(5):1355–1360, 1993.

[CT91] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley $ Sons, N.Y., 1991.

[CW90] Ronald R. Coifman and M. V. Wickerhauser. *Best-Adapted Wave Packet Bases*. Technical Report, Math Dept., Yale University, New Haven, 1990.

[CW92] R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser. Entropy-based algorithms for best basis selection. *IEEE Transaction on Information Theory*, 38(2):713–718, March 1992.

[Dau88a] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41:909–996, November 1988.

[Dau88b] Ingrid Daubechies. Time-frequency localization operators: a geometric phase space approach. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(4):605–612, July 1988.

[Dau89] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of wavelets with finite support – connection with discrete filters. In J. M. Combes, A. Grossman, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 38–66, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Proceedings of International Colloquium on Wavelets and Applications, Marseille, France, Dec. 1987.

[Dau90] Ingrid Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transaction on Information Theory*, 36(5):961–1005, September 1990. Also a Bell Labs Technical Report.

[Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, Philadelphia, PA, 1992. Notes from the 1990 CBMS-NSF Conference on Wavelets and Applications at Lowell, MA.

[Dau93] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets II, variations on a theme. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 24(2):499–519, March 1993.

[Dau96] Ingrid Daubechies. Where do wavelets comre from? – a personal point of view. *Proceedings of the IEEE*, 84(4):510–513, April 1996.

[DD87] G. Deslauriers and S. Dubuc. Interpolation dyadique. In G. Cherbit, editor, *Fractals, Dimensions Non Entiérs et Applications*, pages 44–45, Masson, Paris, 1987.

[DDO97] Wolfgang Dahmen, Andrew Durdila, and Peter Oswald, editors. *Multiscale Wavelet Methods for Partial Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1997.

[DFN*93] Special issue on wavelets and signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3213–3600, December 1993.

[DJ94a] David L. Donoho and Iain M. Johnstone. Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 319, to appear 1994. Also Stanford Statistics Dept. Report 461, Sept. 1994.

[DJ94b] David L. Donoho and Iain M. Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425–455, 1994. Also Stanford Statistics Dept. Report TR-400, July 1992.

[DJ95] David L. Donoho and Iain M. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of American Statist. Assn.*, to appear 1995. Also Stanford Statistics Dept. Report TR-425, June 1993.

[DJJ] Ingrid Daubechies, Stéphane Jaffard, and Jean-Lin Journé. A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay. *preprint.*

[DJKP95a] David L. Donoho, Iain M. Johnstone, Gérard Kerkyacharian, and Dominique Picard. Discussion of "Wavelet Shrinkage: Asymptopia?". *Journal Royal Statist. Soc. Ser B.*, 57(2):337–369, 1995. Discussion of paper by panel and response by authors.

[DJKP95b] David L. Donoho, Iain M. Johnstone, Gérard Kerkyacharian, and Dominique Picard. Wavelet shrinkage: asymptopia? *Journal Royal Statistical Society B.*, 57(2):301–337, 1995. Also Stanford Statistics Dept. Report TR-419, March 1993.

[DL91] Ingrid Daubechies and Jeffrey C. Lagarias. Two-scale difference equations, part I. existence and global regularity of solutions. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 22:1388–1410, 1991. From an internal report, AT&T Bell Labs, Sept. 1988.

[DL92] Ingrid Daubechies and Jeffrey C. Lagarias. Two-scale difference equations, part II. local regularity, infinite products of matrices and fractals. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 23:1031–1079, July 1992. From an internal report, AT&T Bell Labs, Sept. 1988.

[DL93] R. DeVire and G. Lorentz. *Constructive Approximation.* Springer-Verlag, 1993.

[DM93] R. E. Van Dyck and T. G. Marshall, Jr. Ladder realizations of fast subband/vq coders with diamond structures. In *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages III:177–180, ISCAS, 1993.

[DMW92] Special issue on wavelet transforms and multiresolution signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2, part II):529–924, March, part II 1992.

[Don93a] David L. Donoho. Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data. In Ingrid Daubechies, editor, *Different Perspectives on Wavelets, I*, pages 173–205, American Mathematical Society, Providence, 1993. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics and Stanford Report 437, July 1993.

[Don93b] David L. Donoho. Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1(1):100–115, December 1993. Also Stanford Statistics Dept. Report TR-410, Nov. 1992.

[Don93c] David L. Donoho. *Wavelet Skrinkage and W. V. D. – A Ten Minute Tour*. Technical Report TR-416, Statistics Department, Stanford University, Stanford, CA, January 1993. Preprint.

[Don94] David L. Donoho. On minimum entropy segmentation. In C. K. Chui, L. Montefusco, and L. Puccio, editors, *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, Academic Press, San Diego, 1994. Also Stanford Tech Report TR-450, 1994; Volume 5 in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[Don95] David L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(3):613–627, May 1995. also Stanford Statistics Dept. report TR-409, Nov. 1992.

[Donar] David L. Donoho. Interpolating wavelet transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, to appear. Also Stanford Statistics Dept. report TR-408, Nov. 1992.

[DS52] R. J. Duffin and R. C. Schaeffer. A class of nonharmonic fourier series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 72:341–366, 1952.

[DS83] J. E. Dennis and R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1st edition, 1983.

[DS96a] Ingrid Daubechies and Wim Sweldens. *Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps*. Technical Report, Princeton and Lucent Technologies, NJ, September 1996. Preprint.

[DS96b] T. R. Downie and B. W. Silverman. *The Discrete Multiple Wavelet Transform and Thresholding Methods*. Technical Report, University of Bristol, November 1996. Submitted to *IEEE Tran. Signal Processing*.

[Dut89] P. Dutilleux. An implementation of the "algorithme à trou" to compute the wavelet transform. In J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 2–20, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Proceedings of International Colloquium on Wavelets and Applications, Marseille, France, Dec. 1987.

[DVN88] Z. Doğanata, P. P. Vaidyanathan, and T. Q. Nguyen. General synthesis procedures for FIR lossless transfer matrices, for perfect-reconstruction multirate filter bank applications. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(10):1561–1574, October 1988.

[Eir92] T. Eirola. Sobolev characterization of solutions of dilation equations. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 23(4):1015–1030, July 1992.

[FHV93] M. Farge, J. C. R. Hunt, and J. C. Vassilicos, editors. *Wavelets, Fractals, and Fourier Tranforms*. Clarendon Press, Oxford, 1993. Proceedings of a conference on Wavelets at Newnham College, Cambridge, Dec. 1990.

[FK94] Efi Foufoula-Georgiou and Praveen Kumar, editors. *Wavelets in Geophyics*. Academic Press, San Diego, 1994. Volume in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[Fli94] F. J. Fliege. *Multirate Digital Signal Processing: Multrirate Systems, Filter Banks, and Wavelets*. Wiley & Sons, New York, 1994.

[Gab46] D. Gabor. Theory of communication. *Journal of the Institute for Electrical Engineers*, 93:429–439, 1946.

[GB90] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. Efficient computation of the wavelet transforms. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1599–1602, Albuquerque, NM, April 1990.

[GB92a] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. Cosine–modulated orthonormal wavelet bases. In *Paper Summaries for the IEEE Signal Processing Society's Fifth DSP Workshop*, page 1.10.1, Starved Rock Lodge, Utica, IL, September 13–16, 1992.

[GB92b] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. On the moments of the scaling function ψ_0. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 963–966, ISCAS-92, San Diego, CA, May 1992.

[GB92c] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. Wavelet transforms and filter banks. In Charles K. Chui, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, pages 603–655, Academic Press, San Diego, CA, 1992. Volume 2 in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[GB93] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. Theory of modulated filter banks and modulated wavelet tight frames. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Signal Processing*, pages III–169–172, IEEE ICASSP-93, Minneapolis, April 1993.

[GB94a] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. On upsampling, downsampling and rational sampling rate filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, April 1994. Also Tech. Report No. CML TR91-25, 1991.

[GB94b] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. Unitary FIR filter banks and symmetry. *IEEE Transaction on Circuits and Systems II*, 41:695–700, October 1994. Also Tech. Report No. CML TR92-17, August 1992.

[GB95a] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. Factorization approach to unitary time-varying filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(3):666–680, March 1995. Also a Tech Report No. CML TR-92-23, Nov. 1992.

[GB95b] R. A. Gopinath and C. S. Burrus. Theory of modulated filter banks and modulated wavelet tight frames. *Applied and Computational Harmonic Analysis: Wavelets and Signal Processing*, 2:303–326, October 1995. Also a Tech. Report No. CML TR-92-10, 1992.

[GB95c] Ramesh A. Gopinath and C. Sidney Burrus. On cosine–modulated wavelet orthonormal bases. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(2):162–176, February 1995. Also a Tech. Report No. CML TR-91-27, March 1992.

[GB96a] Haitao Guo and C. Sidney Burrus. Approximate FFT via the discrete wavelet transform. In *Proceedings of SPIE Conference 2825*, Denver, August 6–9 1996.

[GB96b] Haitao Guo and C. Sidney Burrus. Convolution using the discrete wavelet transform. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages III–1291–1294, IEEE ICASSP-96, Atlanta, May 7–10 1996.

[GB96c] Haitao Guo and C. Sidney Burrus. Phase-preserving compression of seismic images using the self-adjusting wavelet transform. In *NASA Combined Industry, Space and Earth Science Data Compression Workshop (in conjunction with the IEEE Data Compression Conference, DCC-96), JPL Pub. 96-11*, pages 101–109, Snowbird, Utah, April 4 1996.

[GB97a] Haitao Guo and C. Sidney Burrus. Fast approximate Fourier transform via wavelet transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, submitted, January 1997.

[GB97b] Haitao Guo and C. Sidney Burrus. Waveform and image compression with the Burrows Wheeler transform and the wavelet transform. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, IEEE ICIP-97, Santa Barbara, October 26-29 1997.

[GB97c] Haitao Guo and C. Sidney Burrus. Wavelet transform based fast approximate Fourier transform. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages III:1973–1976, IEEE ICASSP-97, Munich, April 21–24 1997.

[GGM84a] P. Goupillaud, A. Grossman, and J. Morlet. Cyclo-octave and related transforms in seismic signal analysis. *SIAM J. Math. Anal.*, 15:723–736, 1984.

[GGM84b] P. Groupillaud, A. Grossman, and J. Morlet. Cyclo-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, (23), 1984.

[GGT89] S. Ginette, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian. Use of wavelet transforms in the study of propagation of transient acoustic signals across a plane interface between two homogeneous media. In J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 139–146, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Proceedings of the International Conference, Marseille, Dec. 1987.

[GHM94] J. S. Geronimo, D. P. Hardin, and P. R. Massopust. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions. *Journal of Approximation Theory*, 78:373–401, 1994.

[GKM89] A. Grossman, R. Kronland-Martinet, and J. Morlet. Reading and understanding continuous wavelet transforms. In J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 2–20, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Proceedings of International Colloquium on Wavelets and Applications, Marseille, France, Dec. 1987.

[GL93] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Compuations*. Johns Hopkins University Press, 1993.

[GL94] T. N. T. Goodman and S. L. LEE. Wavelets of multiplicity r. *Tran. American Math. Society*, 342(1):307–324, March 1994.

[GLOB95] H. Guo, M. Lang, J. E. Odegard, and C. S. Burrus. Nonlinear processing of a shift-invariant DWT for noise reduction and compression. In *Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing*, pages 332–337, Limassol, Cyprus, June 26–28 1995.

[GLRT90] R. Glowinski, W. Lawton, M. Ravachol, and E. Tenenbaum. Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic, parabolic and hyperbolic problems in one dimension. In *Proceedings of the Ninth SIAM International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Philadelphia, 1990.

[GLT93] T. N. T. Goodman, S. L. Lee, and W. S. Tang. Wavelets in wandering subspaces. *Tran. American Math. Society*, 338(2):639–654, August 1993.

[GOB92] R. A. Gopinath, J. E. Odegard, and C. S. Burrus. On the correlation structure of multiplicity M scaling functions and wavelets. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 959–962, ISCAS-92, San Diego, CA, May 1992.

[GOB94] R. A. Gopinath, J. E. Odegard, and C. S. Burrus. Optimal wavelet representation of signals and the wavelet sampling theorem. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 41(4):262–277, April 1994. Also a Tech. Report No. CML TR-92-05, April 1992, revised Aug. 1993.

[GOL*94a] H. Guo, J. E. Odegard, M. Lang, R. A. Gopinath, I. Selesnick, and C. S. Burrus. Speckle reduction via wavelet soft-thresholding with application to SAR based ATD/R. In *Proceedings of SPIE Conference 2260*, San Diego, July 1994.

[GOL*94b] H. Guo, J. E. Odegard, M. Lang, R. A. Gopinath, I. W. Selesnick, and C. S. Burrus. Wavelet based speckle reduction with application to SAR based ATD/R. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, pages I:75–79, IEEE ICIP-94, Austin, Texas, November 13-16 1994.

[Gop90] Ramesh A. Gopinath. *The Wavelet Transforms and Time-Scale Analysis of Signals*. Master's thesis, Rice University, Houston, Tx 77251, 1990.

[Gop92] Ramesh A. Gopinath. *Wavelets and Filter Banks – New Results and Applications*. PhD thesis, Rice University, Houston, Tx, August 1992.

[Gop96a] R. A. Gopinath. Modulated filter banks and local trigonometric bases - some connections. Oct 1996. in preparation.

[Gop96b] R. A. Gopinath. Modulated filter banks and wavelets, a general unified theory. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1585–1588, IEEE ICASSP-96, Atlanta, May 7–10 1996.

[GORB96] J. Götze, J. E. Odegard, P. Rieder, and C. S. Burrus. Approximate moments and regularity of efficiently implemented orthogonal wavelet transforms. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages II–405–408, IEEE ISCAS-96, Atlanta, May 12-14 1996.

[Gri93] Gustaf Gripenberg. Unconditional bases of wavelets for Sobelov spaces. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 24(4):1030–1042, July 1993.

[Guo94] Haitao Guo. *Redundant Wavelet Transform and Denoising*. Technical Report CML-9417, ECE Dept and Computational Mathematics Lab, Rice University, Houston, Tx, December 1994.

[Guo95] Haitao Guo. *Theory and Applications of the Shift-Invariant, Time-Varying and Undecimated Wavelet Transform*. Master's thesis, ECE Department, Rice University, April 1995.

[Guo97] Haitao Guo. *Wavelets for Approximate Fourier Transform and Data Compression*. PhD thesis, ECE Department, Rice University, Houston, Tx, May 1997.

[Haa10] Alfred Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, 69:331–371, 1910. Also in PhD thesis.

[HB92] F. Hlawatsch and G. F. Boudreaux-Bartels. Linear and quadratic time-frequency signal representations. *IEEE Signal Processing Magazine*, 9(2):21–67, April 1992.

[Hei93] Henk J. A. M. Heijmans. Descrete wavelets and multiresolution analysis. In Tom H. Koornwinder, editor, *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications*, pages 49–80, World Scientific, Singapore, 1993.

[Hel95] Peter N. Heller. Rank m wavelet matrices with n vanishing moments. *SIAM Journal on Matrix Analysis*, 16:502–518, 1995. Also as technical report AD940123, Aware, Inc., 1994.

[Her71] O. Herrmann. On the approximation problem in nonrecursive digital filter design. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 18:411–413, May 1971. Reprinted in *DSP* reprints, IEEE Press, 1972, page 202.

[HHSM95] A. N. Hossen, U. Heute, O. V. Shentov, and S. K. Mitra. Subband DFT – Part II: accuracy, complexity, and applications. *Signal Processing*, 41:279–295, 1995.

[HKRV92] Cormac Herley, Jelena Kovačević, Kannan Ramchandran, and Martin Vetterli. Time-varying orthonormal tilings of the time-frequency plane. In *Proceedings of the IEEE Signal Processing Society's International Symposium on Time–Frequency and Time–Scale Analysis*, pages 11–14, Victoria, BC, Canada, October 4–6, 1992.

[HKRV93] Cormac Herley, Jelena Kovačević, Kannan Ramchandran, and Martin Vetterli. Tilings of the time-frequency plane: consturction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3341–3359, December 1993. Special issue on wavelets.

[HPW94] Frederic Heurtaux, Fabrice Planchon, and Mladen V. Wickerhauser. Scale decomposition in Burgers' equation. In John J. Benedetto and Michael W. Frazier, editors, *Wavelets: Mathematics and Applications*, pages 505–524, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[HR96] D. P. Hardin and D. W. Roach. *Multiwavelet Prefilters I: Orthogonal prefilters preserving approximation order* $p \leq 2$. Technical Report, Vanderbilt University, 1996.

[HRW92] Peter N. Heller, Howard L. Resnikoff, and Raymond O. Wells, Jr. Wavelet matrices and the representation of discrete functions. In Charles K. Chui, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, pages 15–50, Academic Press, Boca Raton, 1992. Volume 2 in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[HSS*95] P. N. Heller, V. Strela, G. Strang, P. Topiwala, C. Heil, and L. S. Hills. Multiwavelet filter banks for data compression. In *IEEE Proceedings of the International Symposium on Circuits and Systems*, pages 1796–1799, 1995.

[HSS96] C. Heil, G. Strang, and V. Strela. Approximation by translates of refinable functions. *Numerische Mathematik*, 73(1):75–94, March 1996.

[Hub96] Barbara Burke Hubbard. *The World According to Wavelets.* A K Peters, Wellesley, MA, 1996.

[HW89] C. E. Heil and D. F. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 31(4):628–666, December 1989.

[HW94] Peter N. Heller and R. O. Wells. The spectral theory of multiresolution operators and applications. In C. K. Chui, L. Montefusco, and L. Puccio, editors, *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, pages 13–31, Academic Press, San Diego, 1994. Also as technical report AD930120, Aware, Inc., 1993; Volume 5 in the series: *Wavelet Analysis and its Applications.*

[HW96a] Peter N. Heller and R. O. Wells. Sobolev regularity for rank M wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, submitted, Oct. 1996. Also a CML Technical Report TR9608, Rice University, 1994.

[HW96b] Eugenio Hernández and Guido Weiss. *A First Course on Wavelets.* CRC Press, Boca Raton, 1996.

[IRP*96] Plamen Ch. Ivanov, Michael G Rosenblum, C.-K. Peng, Joseph Mietus, Shlomo Havlin, H. Eugene Stanley, and Ary L. Goldberger. Scaling behaviour of heartbeat intervals obtained by wavelet-based time-series analysis. *Nature*, 383:323–327, September 26 1996.

[JB82] H. W. Johnson and C. S. Burrus. The design of optimal DFT algorithms using dynamic programming. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 20–23, Paris, May 1982.

[JCF95] R. L. Josho, V. J. Crump, and T. R. Fischer. Image subband coding using arithmetic coded trellis coded quantization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 515–523, December 1995.

[Jia95] R. Q. Jia. Subdivision schemes in L_p spaces. *Advances in Computational Mathematics*, 3:309–341, 1995.

[JMNK96] Bruce R. Johnson, Jason P. Modisette, Peter A. Nordlander, and James L. Kinsey. *Quadrature Integration for Compact Support Wavelets.* Technical Report, Chemistry Dept. Rice University, November 1996. preprint, submitted to *Journal of Computational Physics.*

[JN84] N. S. Jayant and P. Noll. *Digital Coding of Waveforms.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1st edition, 1984.

[JRZ96a] R. Q. Jia, S. D. Riemenschneider, and D. X. Zhou. *Approximation by Multiple Refinable Functions.* Technical Report, University of Alberta, 1996. To appear in: Canadian Journal of Mathematics.

[JRZ96b] R. Q. Jia, S. D. Riemenschneider, and D. X. Zhou. *Vector Subdivision Schemes and Multiple Wavelets.* Technical Report, University of Alberta, 1996.

[JRZ97] R. Q. Jia, S. D. Riemenschneider, and D. X. Zhou. *Smoothness of Multiple Refinable Functions and Multiple Wavelets.* Technical Report, University of Alberta, 1997.

[JS94a] Björn Jawerth and Wim Sweldens. An overview of wavelet based multiresolution analyses. *SIAM Review,* 36:377–412, 1994. Also a University of South Carolina Math Dept. Technical Report, Feb. 1993.

[JS94b] I. M. Johnstone and B. W. Silverman. *Wavelet Threshold Estimators for Data with Correlated Noise.* Technical Report, Statistics Dept., University of Bristol, September 1994.

[Kai94] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets.* Birkhäuser, Boston, 1994.

[KMDW95] H. Krim, S. Mallat, D. Donoho, and A. Willsky. Best basis algorithm for signal enhancement. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing,* pages 1561–1564, IEEE ICASSP-95 Detroit, May 1995.

[Koo93] Tom H. Koornwinder, editor. *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications.* World Scientific, Singapore, 1993.

[KR90] G. Kaiser and M. B. Ruskai, editors. *NSF/CMBS Regional Conference on Wavelets.* University of Lowell, MA, June 11 - 15, 1990. Speakers: I.Daubechies, G.Beylkin, R.Coifman, S.Mallat, M.Vetterli, Aware, Inc.

[KS92] A. A. A. C. Kalker and Imran Shah. Ladder structures for multidimensional linear phase perfect reconstruction filter banks and wavelets. In *Proceedings of SPIE Conference 1818 on Visual Communications and Image Processing,* 1992.

[KT93] Jaroslav Kautsky and Radko Turcajová. Discrete biorthogonal wavelet transforms as block circulant matrices. *Linear Algegra and its Applications,* submitted 1993.

[KT94a] Jaroslav Kautsky and Radko Turcajová. A matrix approach to discrete wavelets. In Charles K. Chui, Laura Montefusco, and Luigia Puccio, editors, *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications,* pages 117–136, Academic Press, Boca Raton, 1994. Volume 5 in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[KT94b] Man Kam Kwong and P. T. Peter Tang. W-matrices, nonorthogonal multiresolution analysis, and finite signals of arbitrary length. *preprint,* 1994.

[KV92] R. D. Koilpillai and P. P. Vaidyanathan. Cosine modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction. *IEEE Transactions on Signal Processing,* 40(4):770–783, April 1992.

[Kwo94] Man Kam Kwong. MATLAB implementation of W-matrix multiresolution analyses. *preprint-MCS-P462-0894,* September 1994.

[Law] W. Lawton. Private communication.

[Law90] Wayne M. Lawton. Tight frames of compactly supported affine wavelets. *Journal of Mathematical Physics,* 31(8):1898–1901, August 1990. Also Aware, Inc. Tech Report AD891012.

[Law91a] Wayne M. Lawton. Multiresolution properties of the wavelet Galerkin operator. *Journal of Mathematical Physics,* 32(6):1440–1443, June 1991.

[Law91b] Wayne M. Lawton. Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases. *Journal of Mathematical Physics,* 32(1):57–61, January 1991. Also Aware, Inc. Tech. Report AD900402, April 1990.

[Law97] Wayne M. Lawton. Infinite convolution products & refinable distributions on Lie groups. *Transactions of the American Mathematical Soceity,* submitted 1997.

[LGO*95] M. Lang, H. Guo, J. E. Odegard, C. S. Burrus, and R. O. Wells, Jr. Nonlinear processing of a shift-invariant DWT for noise reduction. In Harold H. Szu, editor, *Proceedings of SPIE Conference 2491, Wavelet Applications II,* pages 640–651, Orlando, April 17–21 1995.

[LGO*96] M. Lang, H. Guo, J. E. Odegard, C. S. Burrus, and R. O. Wells, Jr. Noise reduction using an undecimated discrete wavelet transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(1):10–12, January 1996.

[LGOB95] M. Lang, H. Guo, J. E. Odegard, and C. S. Burrus. Nonlinear redundant wavelet methods for image enhancement. In *Proceedings of IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, pages 754–757, Halkidiki, Greece, June 20–22 1995.

[LH96] Markus Lang and Peter N. Heller. The design of maximally smooth wavlets. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1463–1466, IEEE ICASSP-96, Atlanta, May 1996.

[Lin95] A. R. Lindsey. *Generalized Orthogonally Multiplexed Communication via Wavelet Packet Bases*. PhD thesis, June 1995.

[LKC*94] R. E. Learned, H. Krim, B. Claus, A. S. Willsky, and W. C. Karl. Wavelet-packet-based multiple access communications. In *Proceedings of SPIE Conference, Wavelet Applications in Signal and Image Processing, Vol. 2303*, pages 246–259, San Diego, July 1994.

[LLK96] K.-C. Lian, J. Li, and C.-C. J. Kuo. Image compression with embedded multiwavelet coding. In *Proceedings of SPIE, Wavelet Application III*, pages 165–176, Orlando, FL, April 1996.

[LLS97a] Wayne M. Lawton, S. L. Lee, and Z. Shen. Convergence of multidimensional cascade algorithm. *Numerische Mathematik*, to appear 1997.

[LLS97b] Wayne M. Lawton, S. L. Lee, and Z. Shen. Stability and orthonormality of multivariate refinable functions. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, to appear 1997.

[LM89] J. L. Larsonneur and J. Morlet. Wavelet and seismic interpretation. In J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 126–131, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Proceedings of the International Conference, Marseille, Dec. 1987.

[LP89] G. Longo and B. Picinbono, editors. *Time and Frequency Representation of Signals and Systems*. Springer-Verlag, Wien – New York, 1989. CISM Courses and Lectures No. 309.

[LP94a] Jie Liang and Thomas W. Parks. A translation invariant wavelet representation algorithm with applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, submitted April 1994.

[LP94b] Jie Liang and Thomas W. Parks. A two-dimensional translation invariant wavelet representation and its applications. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, pages I:66–70, Austin, November 1994.

[LPT92] J. Liandrat, V. Perrier, and Ph. Tchamitchian. Numerical resolution of nonlinear parital differential equations using the wavelet approach. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, I. Daubechies, Y. Meyer, R. Coifman, S. Mallat, and L Raphael, editors, *Wavelets and Their Applications*, pages 181–210, Jones and Bartlett, Boston, 1992. Outgrowth of the NSF/CBMS Conference on Wavelets, Lowell, June 1990.

[LR91] Wayne M. Lawton and Howard L. Resnikoff. *Multidimensional Wavelet Bases*. Aware Report AD910130, Aware, Inc., February 1991.

[LRO97] S. M. LoPresto, K. Ramchandran, and M. T. Orchard. Image coding based on mixture modeling of wavelet coefficients and a fast estimation-quantization framework. *Proc. DCC*, March 1997.

[LSOB94] M. Lang, I. Selesnick, J. E. Odegard, and C. S. Burrus. Constrained FIR filter design for 2-band filter banks and orthonormal wavelets. In *Proceedings of the IEEE Digital Signal Processing Workshop*, pages 211–214, Yosemite, October 1994.

[LV95] Yuan-Pei Lin and P. P. Vaidyanathan. Linear phase cosine-modulated filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43, 1995.

[Mal89a] S. G. Mallat. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37:2091–2110, December 1989.

[Mal89b] S. G. Mallat. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L^2. *Transactions of the American Mathematical Society*, 315:69–87, 1989.

[Mal89c] S. G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Recognition and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, July 1989.

[Mal91] S. G. Mallat. Zero-crossings of a wavelet transform. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(4):1019–1033, July 1991.

[Mal92] Henrique S. Malvar. *Signal Processing with Lapped Transforms*. Artech House, Boston, MA, 1992.

[Mal97] Stéphane Mallat. *Wavelet Signal Processing*. Academic Press, 1997. to appear.

[Mar91] R. J. Marks II. *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Mar92] T. G. Marshall, Jr. Predictive and ladder realizations of subband coders. In *Proceedings of IEEE Workshop on Visual Signal Processing and Communication*, Raleigh, NC, 1992.

[Mar93] T. G. Marshall, Jr. A fast wavelet transform based on the eucledean algorithm. In *Proceedings of Conference on Information Sciences and Systems*, Johns Hopkins University, 1993.

[Mas94] Peter R. Massopust. *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*. Academic Press, San Diego, 1994.

[Mau92] J. Mau. Perfect reconstruction modulated filter banks. In *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages IV–273, IEEE, San Francisco, CA, 1992.

[Mey87] Y. Meyer. L'analyses par ondelettes. *Pour la Science*, September 1987.

[Mey89] Y. Meyer. Orthonormal wavelets. In J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 21–37, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Proceedings of International Colloquium on Wavelets and Applications, Marseille, France, Dec. 1987.

[Mey90] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, Paris, 1990.

[Mey92a] Y. Meyer, editor. *Wavelets and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Proceedings of the Marseille Workshop on Wavelets, France, May, 1989; Research Notes in Applied Mathematics, RMA-20.

[Mey92b] Yves Meyer. *Wavelets and Operators*. Cambridge, Cambridge, 1992. Translated by D. H. Salinger from the 1990 French edition.

[Mey93] Yves Meyer. *Wavelets, Algorithms and Applications*. SIAM, Philadelphia, 1993. Translated by R. D. Ryan based on lectures given for the Spanish Institute in Madrid in Feb. 1991.

[MF97] Stéphane Mallat and Frédéric Falzon. Understanding image transform codes. In *Proceedings of SPIE Conference, Aerosense*, Orlando, April 1997.

[MLB89] Cleve Moler, John Little, and Steve Bangert. MATLAB *User's Guide*. The MathWorks, Inc., South Natick, MA, 1989.

[MMOP96] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim, and Jean-Michel Poggi. *Wavelet Toolbox User's Guide*. The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1996.

[Mou93] Pierre Moulin. A wavelet regularization method for diffuse radar-target imaging and speckle-noise reduction. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 3:123–134, 1993.

[MP89] C. A. Micchelli and Prautzsch. Uniform refinement of curves. *Linear Algebra, Applications*, 114/115:841–870, 1989.

[MW94a] Stephen Del Marco and John Weiss. Improved transient signal detection using a wavepacket-based detector with an extended translation-invariant wavelet transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43, submitted 1994.

[MW94b] Stephen Del Marco and John Weiss. M-band wavepacket-based transient signal detector using a translation-invariant wavelet transform. *Optical Engineering*, 33(7):2175–2182, July 1994.

[MWJ94] Stephen Del Marco, John Weiss, and Karl Jagler. Wavepacket-based transient signal detector using a translation invariant wavelet transform. In *Proceedings of Conference on Wavelet Applications*, pages 792–802, SPIE, Orlando, FL, April 1994.

[MZ93] S. G. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3397–3415, December 1993.

[NAT96] Mohammed Nafie, Murtaza Ali, and Ahmed Tewfik. Optimal subset selection for adaptive signal representation. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 2511–2514, IEEE ICASSP-96, Atlanta, May 1996.

[Ngu92] T. Q. Nguyen. A class of generalized cosine-modulated filter banks. In *Proceedings of ISCAS, San Diego, CA*, pages 943–946, IEEE, 1992.

[Ngu94] Trong Q. Nguyen. Near perfect reconstruction pseudo QMF banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(1):65–76, January 1994.

[Ngu95a] Trong Q. Nguyen. Digital filter banks design quadratic constrained formulation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(9):2103–2108, September 1995.

[Ngu95b] Truong Q. Nguyen. Aliasing-free reconstruction filter banks. In Wai-Kai Chen, editor, *The Circuits and Filters Handbook*, chapter 85, pages 2682–2717, CRC Press and IEEE Press, Roca Raton, 1995.

[NH96] Truong Q. Nguyen and Peter N. Heller. Biorthogonal cosine-modulated filter band. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1471–1474, IEEE ICASSP-96, Atlanta, May 1996.

[NK92] T. Q. Nguyen and R. D. Koilpillai. The design of arbitrary length cosine-modulated filter banks and wavelets satisfying perfect reconstruction. In *Proceedings of IEEE-SP Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Methods '92, Victoria, BC*, pages 299–302, IEEE, 1992.

[nRGB91] D. L. Jones nd R. G. Barniuk. Efficient approximation of continuous wavelet transforms. *Electronics Letters*, 27(9):748–750, 1991.

[NS95] G. P. Nason and B. W. Silverman. *The Stationary Wavelet Transform and some Statistical Applications*. Technical Report, Department of Mathematics, University of Bristol, Bristol, UK, February 1995. preprint obtained via the internet.

[NV88] T. Q. Nguyen and P. P. Vaidyanathan. Maximally decimated perfect-reconstruction FIR filter banks with pairwise mirror-image analysis and synthesis frequency responses. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(5):693–706, 1988.

[OB95] J. E. Odegard and C. S. Burrus. Design of near-orthogonal filter banks and wavelets by Lagrange multipliers. 1995.

[OB96a] Jan E. Odegard and C. Sidney Burrus. New class of wavelets for signal approximation. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages II–189–192, IEEE ISCAS-96, Atlanta, May 12-15 1996.

[OB96b] Jan E. Odegard and C. Sidney Burrus. Toward a new measure of smoothness for the design of wavelet basis. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages III–1467–1470, IEEE ICASSP-96, Atlanta, May 7–10 1996.

[OB97] J. E. Odegard and C. S. Burrus. Wavelets with new moment approximation properties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, submitted, January 1997.

[Ode96] J. E. Odegard. *Moments, smoothness and optimization of wavelet systems*. PhD thesis, Rice University, Houston, TX 77251, USA, May 1996.

[OGB92] J. E. Odegard, R. A. Gopinath, and C. S. Burrus. Optimal wavelets for signal decomposition and the existence of scale limited signals. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Signal Processing*, pages IV 597–600, ICASSP-92, San Francisco, CA, March 1992.

[OGB94] J. E. Odegard, R. A. Gopinath, and C. S. Burrus. *Design of Linear Phase Cosine Modulated Filter Banks for Subband Image Compression*. Technical Report CML TR94-06, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, TX, February 1994.

[OGL*95] J. E. Odegard, H. Guo, M. Lang, C. S. Burrus, R. O. Wells, Jr., L. M. Novak, and M. Hiett. Wavelet based SAR speckle reduction and image compression. In *Proceedings of SPIE Conference 2487, Algorithms for SAR Imagery II*, Orlando, April 17–21 1995.

[OS89] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[OY87] Özdoğan Yilmaz. *Seismic Data Processing*. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, 1987. Stephen M. Doherty editor.

[P P89] P. P. Vaidyanathan and Z. Doğanata. The role of lossless systems in modern digital signal processing: a tutorial. *IEEE Transactions on Education*, August 1989.

[Pap77] Athanasios Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1977.

[PB87] T. W. Parks and C. S. Burrus. *Digital Filter Design*. John Wiley & Sons, New York, 1987.

[PKC96] J. C. Pesquet, H. Krim, and H. Carfantan. Time-invariant orthonormal wavelet representations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(8):1964–1970, August 1996.

[Plo95a] G. Plonka. *Approximation order provided by refinable function vectors*. Technical Report 95/1, Universität Rostock, 1995. To appear in: Constructive Approximation.

[Plo95b] G. Plonka. Approximation properties of multi-scaling functions: a fourier approach. 1995. Rostock. Math. Kolloq. 49, 115–126.

[Plo95c] G. Plonka. Factorization of refinement masks of function vectors. In C. K. Chui and L. L. Schumaker, editors, *Wavelets and Multilevel Approximation*, pages 317–324, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1995.

[Plo97a] G. Plonka. *Necessary and sufficient conditions for orthonormality of scaling vectors*. Technical Report, Universität Rostock, 1997.

[Plo97b] G. Plonka. On stability of scaling vectors. In A. Le Mehaute, C. Rabut, and L. L. Schumaker, editors, *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, Vanderbilt University Press, Nashville, 1997. Also Technical Report 1996/15, Universität Rostock.

[Polar] D. Pollen. Daubechies' scaling function on [0,3]. *J. American Math. Soc.*, to appear. Also Aware, Inc. tech. report AD891020, 1989.

[PS95] G. Plonka and V. Strela. *Construction of multi-scaling functions with approximation and symmetry.* Technical Report 95/22, Universität Rostock, 1995. To appear in: SIAM J. Math. Anal.

[PV96] See-May Phoong and P. P. Vaidyanathan. A polyphase approach to time-varying filter banks. In *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 1554–1557, IEEE, Atlanta, GA, 1996.

[RBC*92] M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editors. *Wavelets and their Applications.* Jones and Bartlett, Boston, MA, 1992. Outgrowth of NSF/CBMS conference on Wavelets held at the University of Lowell, June 1990.

[RBSB94] J. O. A. Robertsson, J. O. Blanch, W. W. Symes, and C. S. Burrus. Galerkin–wavelet modeling of wave propagation: optimal finite–difference stencil design. *Mathematical and Computer Modelling*, 19(1):31–38, January 1994.

[RC83] L. Rabiner and D. Crochière. *Multirate Digital Signal Processing.* Prentice-Hall, 1983.

[RD86] E. A. Robinson and T. S. Durrani. *Geophysical Signal Processing.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.

[RD92] Olivier Rioul and P. Duhamel. Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):569–586, March 1992. Special issue on wavelets and multiresolution analysis.

[RD94] Olivier Rioul and Pierre Duhamel. A Remez exchange algorithm for orthonormal wavelets. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 41(8):550–560, August 1994.

[RG95] Peter Rieder and Jürgen Götze. Algebraic optimizaion of biorthogonal wavelet transforms. *preprint*, 1995.

[RGN94] Peter Rieder, Jürgen Götze, and Josef A. Nossek. *Algebraic Design of Discrete Wavelet Transforms.* Technical Report TUM-LNS-TR-94-2, Technical University of Munich, April 1994. Also submitted to IEEE Trans on Circuits and Systems.

[Rio91] O. Rioul. Fast computation of the continuous wavelet transform. In *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, IEEE, Toronto, Canada, March 1991.

[Rio92] Olivier Rioul. Simple regularity criteria for subdivision schemes. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6):1544–1576, November 1992.

[Rio93a] Olivier Rioul. A discrete-time multiresolution theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(8):2591–2606, August 1993.

[Rio93b] Olivier Rioul. Regular wavelets: a discrete-time approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3572–3579, December 1993.

[RN96] P. Rieder and J. A. Nossek. Smooth multiwavelets based on two scaling functions. In *Proc. IEEE Conf. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pages 309–312, 1996.

[Ron92] Amos Ron. *Characterization of Linear Independence and Stability of the Sfifts of a Univariate Refinable Function in Terms of its Refinement Mask.* Technical Report CMS TR 93-3, Computer Science Dept., University of Wisconsin, Madison, September 1992.

[RS83] L. Rabiner and R. W. Schaefer. *Speech Signal Processing.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

[RT91] T. A. Ramstad and J. P. Tanem. Cosine modulated analysis synthesis filter bank with critical sampling and perfect reconstruction. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1789–1792, IEEE ICASSP-91, 1991.

[Rus92] Mary Beth Ruskai. Introduction. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L Raphael, editors, *Wavelets and their Applications*, Jones and Bartlett, Boston, MA, 1992.

[RV91] Olivier Rioul and Martin Vetterli. Wavelet and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 8(4):14–38, October 1991.

[RV93] K. Ramchandran and M. Veterli. Best wavelet packet bases in a rate-distortion sense. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(2):160–175, 1993.

[RW97] H. L. Resnikoff and R. O. Wells, Jr. *Wavelet Analysis and the Scalable Structure of Information*. Springer-Verlag, New York, 1997. to appear.

[RY90] K. R. Rao and P. Yip. *Discrete Cosine Transform - Algorithms, Advantages and Applications*. Academic Press, 1990.

[SA92] E. P. Simoncelli and E. H. Adelson. Subband transforms. In John W. Woods, editor, *Subband Image Coding*, Kluwer, Norwell, MA, to appear 1992. Also, MIT Vision and Modeling Tech. Report No. 137, Sept. 1989.

[Sai94a] Naoki Saito. *Local Feature Extraction and Its Applications Using a Library of Bases*. PhD thesis, Yale University, New Haven, CN, 1994.

[Sai94b] Naoki Saito. Simultaneous noise suppression and signal compression using a library of orthonormal bases and the minimum discription length criterion. In E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, editors, *Wavelets in Geophysics*, Academic Press, San Diego, 1994.

[SB86a] M. J. Smith and T. P. Barnwell. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 34:434–441, June 1986.

[SB86b] M. J. Smith and T. P. Barnwell III. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 34:434–441, 1986.

[SB87] M. J. Smith and T. P. Barnwell. A new filter bank theory for time-frequency representation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35:314–327, March 1987.

[SB93] H. V. Sorensen and C. S. Burrus. Efficient computation of the DFT with only a subset of input or output points. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(3):1184–1200, March 1993.

[SC95] J. A. Storer and M. Cohn, editors. *Proceedings of Data Compression Conference*. IEEE Computer Society Press, Snowbird, Utah, March 1995.

[SC96] J. A. Storer and M. Cohn, editors. *Proceedings of Data Compression Conference*. IEEE Computer Society Press, Snowbird, Utah, April 1996.

[Sca94] John A. Scales. *Theory of Seismic Imaging*. Samizat Press, Golden, CO, 1994.

[Sel96] I. W. Selesnick. *New Techniques for Digital Filter Design*. PhD thesis, Rice University, 1996.

[Sel97] Ivan W. Selesnick. *Parameterization of Orthogonal Wavelet Systems*. Technical Report, ECE Dept. and Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, Tx., May 1997.

[Sha93] J. M. Shapiro. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3445–3462, December 1993.

[She92] M. J. Shensa. The discrete wavelet transform: wedding the à trous and Mallat algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40:2464–2482, 1992.

[SHGB93] P. Steffen, P. N. Heller, R. A. Gopinath, and C. S. Burrus. Theory of regular M-band wavelet bases. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3497–3511, December 1993. Special Transaction issue on wavelets; Rice contribution also in Tech. Report No. CML TR-91-22, Nov. 1991.

[SHS*96] V. Strela, P. N. Heller, G. Strang, P. Topiwala, and C. Heil. *The application of multiwavelet filter banks to image processing.* Technical Report, MIT, January 1996. Submitted to IEEE Tran. Image Processing.

[Sie86] William M. Siebert. *Circuits, Signals, and Systems.* MIT Press and McGraw-Hill, Cambridge and New York, 1986.

[SL96] M. Sablatash and J. H. Lodge. The design of filter banks with specified minimum stopband attenuation for wavelet packet-based multiple access communications. In *Proceedings of 18th Biennial Symposium on Communications, Queen's University*, Kingston, ON, Canada, June 1996.

[SLB97] Ivan W. Selesnick, Markus Lang, and C. Sidney Burrus. Magnitude squared design of recursive filters with the Chebyshev norm using a constrained rational Remez algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, to appear 1997.

[SMHH95] O. V. Shentov, S. K. Mitra, U. Heute, and A. N. Hossen. Subband DFT – Part I: definition, interpretation and extensions. *Signal Processing*, 41:261–278, 1995.

[SN96] Gilbert Strang and T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks.* Wellesley–Cambridge Press, Wellesley, MA, 1996.

[SOB96] Ivan W. Selesnick, Jan E. Odegard, and C. Sidney Burrus. Nearly symmetric orthogonal wavelets with non-integer DC group delay. In *Proceedings of the IEEE Digital Signal Processing Workshop*, pages 431–434, Loen, Norway, September 2–4 1996.

[SP93] Wim Sweldens and Robert Piessens. Calculation of the wavelet decomposition using quadrature formulae. In Tom H. Koornwinder, editor, *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications*, pages 139–160, World Scientific, Singapore, 1993.

[SP96a] A. Said and W. A. Pearlman. A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Transactions Cir. Syst. Video Tech.*, 6(3):243–250, June 1996.

[SP96b] A. Said and W. A. Perlman. An image multiresolution representation for lossless and lossy image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5:1303–1310, September 1996.

[SS94] V. Strela and G. Strang. Finite element multiwavelets. In *Proceedings of SPIE, Wavelet Applications in Signal and Image processing II*, pages 202–213, San Diego, CA, July 1994.

[SS95] G. Strang and V. Strela. Short wavelets and matrix dilation equations. *IEEE Trans. SP*, 43(1):108–115, January 1995.

[Str86] Gilbert Strang. *Introduction to Applied Mathematics.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 1986.

[Str89] Gilbert Strang. Wavelets and dilation equations: a brief introduction. *SIAM Review*, 31(4):614–627, 1989. also, MIT Numerical Analysis Report 89-9, Aug. 1989.

[Str94] Gilbert Strang. Wavelets. *American Scientist*, 82(3):250–255, May 1994.

[Str96a] G. Strang. Eigenvalues of $(\downarrow 2)H$ and convergence of the cascade algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44, 1996.

[Str96b] V. Strela. *Multiwavelets: Theory and Applications.* PhD thesis, Dept. of Mathematics, MIT, June 1996.

[SV93] A. K. Soman and P. P. Vaidyanathan. On orthonormal wavelets and paraunitary filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(3):1170–1183, March 1993.

[SVN93] A. K. Soman, P. P. Vaidyanathan, and T. Q. Nguyen. Linear phase paraunitary filter banks: theory, factorizations and designs. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3480–3496, December 1993.

[SW93] Larry L. Schumaker and Glenn Webb, editors. *Recent Advances in Wavelet Analysis*. Academic Press, San Diego, 1993. Volume in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[SW97] W. So and J. Wang. Estimating the support of a scaling vector. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(1):66–73, January 1997.

[Swe95] Wim Sweldens. *The Lifting Scheme: A Construction of Second Generation Wavelets*. Technical Report TR-1995-6, Math Dept. University of South Carolina, May 1995.

[Swe96a] Wim Sweldens. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3(2):186–200, 1996. Also a technical report, math dept. Univ. SC, April 1995.

[Swe96b] Wim Sweldens. Wavelets: what next? *Proceedings of the IEEE*, 84(4):680–685, April 1996.

[Tas96] Carl Taswell. *Handbook of Wavelet Transform Algorithms*. Birkhäuser, Boston, 1996.

[Tew97] Ahmed H. Tewfik. *Wavelets and Multiscale Signal Processing Techniques: Theory and Applications*. to appear, 1997.

[The89] *The UltraWave Explorer User's Manual*. Aware, Inc., Cambridge, MA, July 1989.

[Tia96] Jun Tian. *The Mathematical Theory and Applications of Biorthogonal Coifman Wavelet Systems*. PhD thesis, Rice University, February 1996.

[TM94a] Hai Tao and R. J. Moorhead. Lossless progressive transmission of scientific data using biorthogonal wavelet transform. In *Proceedings of the IEEE Conference on Image Processing*, Austin, ICIP-94, November 1994.

[TM94b] Hai Tao and R. J. Moorhead. Progressive transmission of scientific data using biorthogonal wavelet transform. In *Proceedings of the IEEE Conference on Visualization*, Washington, October 1994.

[Tur86] M. Turner. Texture discrimination by Gabor functions. *Biological Cybernetics*, 55:71–82, 1986.

[TVC96] M. J. Tsai, J. D. Villasenor, and F. Chen. Stack-run image coding. *IEEE Trans. Circ. and Syst. Video Tech.*, 519–521, October 1996.

[TW95] Jun Tian and Raymond O. Wells, Jr. *Vanishing Moments and Wavelet Approximation*. Technical Report CML TR-9501, Computational Mathematics Lab, Rice University, January 1995.

[TW96] J. Tian and R. O. Wells. Image compression by reduction of indices of wavelet transform coefficients. *Proc. DCC*, April 1996.

[TWBOar] J. Tian, R. O. Wells, C. S. Burrus, and J. E. Odegard. Coifman wavelet systems: approximation, smoothness, and computational algorithms. In Jacques Periaux, editor, *Computational Science for the 21st Century*, John Wiley and Sons, New York, 1997 to appear. in honor of Roland Glowinski's 60th birhtday.

[Uns96] Michael Unser. Approximation power of biorthogonal wavelet expansions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(3):519–527, March 1996.

[VA96] M. J. Vrhel and A. Aldroubi. *Pre-filtering for the Initialization of Multi-wavelet transforms*. Technical Report, National Institutes of Health, 1996.

[Vai87a] P. P. Vaidyanathan. Quadrature mirror filter banks, M–band extensions and perfect–reconstruction techniques. *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing Magazine*, 4(3):4–20, July 1987.

[Vai87b] P. P. Vaidyanathan. Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature morror filters with arbitrary M, having perfect reconstruction properties. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35(4):476–492, April 1987.

[Vai92] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

[VBL95] J. D. Villasenor, B. Belzer, and J. Liao. Wavelet filter evaluation for image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4, August 1995.

[VD89] P. P. Vaidyanathan and Z. Doğanata. The role of lossless systems in modern digital signal processing: A tutorial. *IEEE Trans. on Education*, 32(3):181–197, August 1989.

[VD95] P. P. Vaidyanathan and Igor Djokovic. Wavelet transforms. In Wai-Kai Chen, editor, *The Circuits and Filters Handbook*, chapter 6, pages 134–219, CRC Press and IEEE Press, Roca Raton, 1995.

[Vet86] Martin Vetterli. Filter banks allowing perfect reconstruction. *Signal Processing*, 10(3):219–244, April 1986.

[Vet87] Martin Vetterli. A theory of multirate filter banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35(3):356–372, March 1987.

[VG89] Martin Vetterli and Didier Le Gall. Perfect reconstruction FIR filter banks: some properties and factorizations. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(7):1057–1071, July 1989.

[VH88] P. P. Vaidyanathan and Phuong-Quan Hoang. Lattice structures for optimal design and robust implementation of two-channel perfect reconstruction QMF banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(1):81–93, January 1988.

[VH92] M. Vetterli and C. Herley. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2207–2232, September 1992.

[VK95] Martin Vetterli and Jelena Kovačević. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[VL89] M. Vetterli and D. Le Gall. Perfect reconstruction FIR filter banks: some properties and factorizations. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(7):1057–1071, July 1989.

[VLU97] M. J. Vrhel, C. Lee, and M. Unser. Fast continuous wavelet transform: a least-squares formulation. *Signal Processing*, 57(2):103–120, March 1997.

[VM88] P. P. Vaidyanathan and S. K. Mitra. Polyphase networks, block digital filtering, LPTV systems, and alias-free QMF banks: a unified approach based on pseudocirculants. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36:381–391, March 1988.

[VNDS89] P. P. Vaidyanathan, T. Q. Nguyen, Z. Doğanata, and T. Saramäki. Improved technique for design of perfect reconstruction FIR QMF banks with lossless polyphase matrices. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(7):1042–1056, July 1989.

[Vol92] Hans Volkmer. On the regularity of wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):872–876, March 1992.

[Wal94] Gilbert G. Walter, editor. *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

[WB95] D. Wei and C. S. Burrus. Optimal soft-thresholding for wavelet transform coding. In *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing*, pages I:610–613, Washington, DC, October 1995.

[WB96] Dong Wei and Alan C. Bovik. On generalized coiflets: construction, near-symmetry, and optimization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems:II*, submitted October 1996.

[WB97] Dong Wei and Alan C. Bovik. Sampling approximation by generalized coiflets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, submitted January 1997.

[Wei95] Dong Wei. *Investigation of Biorthogonal Wavelets*. Technical Report ECE-696, Rice University, April 1995.

[Wel93] R. O. Wells, Jr. Parameterizing smooth compactly supported wavelets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 338(2):919–931, 1993. Also Aware tech report AD891231, Dec. 1989.

[Wic92] M. V. Wickerhauser. Acoustic signal compression with wavelet packets. In Charles K. Chui, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, pages 679–700, Academic Press, Boca Raton, 1992. Volume 2 in the series: Wavelet Analysis and its Applications.

[Wic95] Mladen Victor Wickerhauser. *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*. A K Peters, Wellesley, MA, 1995.

[WNC87] I. Witten, R. Neal, and J. Cleary. Arithmetic coding for data compression. *Communications of the ACM*, 30:520–540, June 1987.

[WO92a] G. Wornell and A. V. Oppenheim. Estimation of fractal signals from noisy measurements using wavelets. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 40(3):611–623, March 1992.

[WO92b] G. W. Wornell and A. V. Oppenheim. Wavelet-based representations for a class of self-similar signals with application to fractal modulation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):785–800, March 1992.

[WOG*95a] D. Wei, J. E. Odegard, H. Guo, M. Lang, and C. S. Burrus. SAR data compression using best-adapted wavelet packet basis and hybrid subband coding. In Harold H. Szu, editor, *Proceedings of SPIE Conference 2491, Wavelet Applications II*, pages 1131–1141, Orlando, April 17–21 1995.

[WOG*95b] D. Wei, J. E. Odegard, H. Guo, M. Lang, and C. S. Burrus. Simultaneous noise reduction and SAR image data compression using best wavelet packet basis. In *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing*, pages III:200–203, Washington, DC, October 1995.

[Wor96] Gregory W. Wornell. *Signal Processing with Fractals, A Wavelet- Based Approach*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

[WTWB97] Dong Wei, Jun Tian, Raymond O. Wells, Jr., and C. Sidney Burrus. A new class of biorthogonal wavelet systems for image transform coding. *IEEE Transactions on Image Processing*, to appear 1997.

[WWJ95] J. Wu, K. M. Wong, and Q. Jin. Multiplexing based on wavelet packets. In *Proceedings of SPIE Conference, Aerosense*, Orlando, April 1995.

[WZ94] Raymond O. Wells, Jr and Xiaodong Zhou. Wavelet interpolation and approximate solutions of elliptic partial differential equations. In R. Wilson and E. A. Tanner, editors, *Noncompact Lie Groups*, Kluwer, 1994. Also in Proceedings of NATO Advanced Research Workshop, 1992, and CML Technical Report TR-9203, Rice University, 1992.

[XGHS96] X.-G. Xia, J. S. Geronimo, D. P. Hardin, and B. W. Suter. Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms. *IEEE Trans. SP*, 44(1):25–35, January 1996.

[XHRO95] Z. Xiong, C. Herley, K. Ramchandran, and M. T. Orcgard. Space-frequency quantization for a space-varying wavelet packet image coder. *Proc. Int. Conf. Image Processing*, 1:614–617, October 1995.

[XS96] X.-G. Xia and B. W. Suter. Vector-valued wavelets and vector filter banks. *IEEE Trans. SP*, 44(3):508–518, March 1996.

[You80] R. M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Academic Press, New York, 1980.

[You93] R. K. Young. *Wavelet Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1993.

[ZT92a] H. Zou and A. H. Tewfik. Design and parameterization ofm-band orthonormal wavelets. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 983–986, ISCAS-92, San Diego, 1992.

[ZT92b] H. Zou and A. H. Tewfik. Discrete orthogonal M-band wavelet decompositions. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages IV–605–608, San Francisco, CA, 1992.

索　引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致。

T

V

W

小波与小波变换导论

本书阐述了如何在信号处理、数值分析和数学建模中使用小波作为分析工具。本书把信号展开为基和框架，利用滤波器组作为算法描述。这种统一的观点填补了现有小波文献中的不足。本书给出经典信号处理问题的最新观点，特别强调从应用角度出发的信号压缩，涉及当前研究的最新成果。

本书可作为高年级本科生和研究生的教材，适用于信号处理、无线电通信、计算机科学和应用数学等专业，也适于从事相关领域的研究人员和从业人员阅读。

本书特点

- 以傅里叶方法为基础，逐步发展为更一般的方法。
- 综合了数学和信号处理文献中与小波变换相关的内容。
- 阐述了信号展开和滤波器组的方法。
- 包含对基本小波系统的新的推广，包括*M*带小波、双正交系统、小波包和多小波。
- 对具有*N*阶算法复杂度的近似快速傅里叶变换(FFT)算法给出小波的应用实例。
- 包含其他小波文献的附加指南。
- 附录中包含MATLAB程序。

作者简介

C. Sidney Burrus 1965年在斯坦福大学获得博士学位。于1984~1992年担任莱斯大学ECE系的主任，1992~1998年担任CITI的理事。目前他是莱斯大学教授，并担任乔治布朗工学院院长。他在莱斯大学从事了20多年数字信号处理方面的教学和研究工作。

Ramesh A. Gopinath 分别于1990年和1992年在莱斯大学获得硕士学位和博士学位。

Haitao Guo 于1992年获清华大学自动化系学士学位，分别于1995年和1997年在莱斯大学获得硕士学位和博士学位。现任苹果计算机公司资深科学家和研发部门经理。

Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms

A Primer





影印版

ISBN 7-111-15911-X
定价：29.00 元







ISBN 978-7-111-21544-8
定价：32.00 元

封面设计 · 杨宇梅